CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

COLEGIADO DE MATEMÁTICA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

UNIOESTE – CAMPUS CASCAVEL

LUIZA STUNDER

MÁRCIO VINÍCIUS ROCHA MIRANDA

RAIANNY VITÓRIA ZERNEH

THEO FERNANDO BONFIM DA LUZ

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO I

PROMAT

CASCAVEL

2023

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO I
PROMAT

Relatório apresentado como requisito parcial para aprovação na disciplina de metodologia e prática de ensino de matemática.
Orientador: Prof. Jesus Marcos Camargo

CASCAVEL
2023

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

1. INTRODUÇÃO.

Este trabalho apresenta um relato das atividades desenvolvidas durante a disciplina de Metodologia e Prática de Matemática - Estágio Supervisionado I, integrante do terceiro ano do curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste Campus Cascavel). O foco deste relatório abrange os planos de aula, os relatórios de cada encontro e as experiências vivenciadas no âmbito do programa Promat - Programa de Acesso e Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas, com especial ênfase na área de Matemática.

No decorrer dos dez encontros realizados, foram abordados os seguintes temas frações, razão e proporção, potenciação, radiciação, equações de primeiro e segundo grau e sistemas lineares, funções do primeiro e segundo grau, polinômios, trigonometria e circunferência. Cada tópico foi ministrado por meio de atividades que estimulam o raciocínio lógico, complementadas por listas de exercícios para reforço aos estudantes.

O enfoque pedagógico adotado durante os encontros incluiu a incorporação de jogos, materiais manipulativos e dinâmicas em grupo, reconhecendo que a socialização potencializa a aprendizagem e o desenvolvimento dos alunos. O intuito era criar um ambiente colaborativo e promover a interação social, dada a participação voluntária dos alunos no projeto. Os encontros visavam não apenas transmitir conhecimento, mas também esclarecer dúvidas e consolidar o aprendizado dos participantes.

O objetivo geral era estabelecer um ambiente de aprendizado colaborativo, onde os alunos, motivados por seu interesse voluntário no projeto, pudessem se beneficiar não apenas do conteúdo matemático, mas também do fortalecimento das habilidades sociais. Além disso, buscávamos, como estagiários, adquirir experiência em sala de aula e dar os primeiros passos na carreira docente, o que se concretizou. Nossas expectativas incluíam a troca de aprendizado entre os membros da equipe, a experimentação de diferentes metodologias e práticas, e a constante busca pela melhoria do nosso desempenho, tornando esse estágio um marco inicial e promissor em nossa jornada como futuros professores.

2. PROMAT.

O Projeto Promat, realizado na Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste, no Campus de Cascavel, destina-se a oferecer reforço em conceitos matemáticos ensinados no ensino fundamental voltado para a preparação de alunos do Ensino Médio, visando especialmente os desafios apresentados pelo Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM e outros processos seletivos. Conduzido por alunos do curso de Licenciatura em Matemática, o projeto assume a missão de revisitar conceitos fundamentais da Matemática da Educação Básica que possam não ter sido devidamente assimilados durante o percurso escolar.

As aulas ministradas pelos estagiários do curso de Licenciatura em Matemática, transcorreram aos sábados pela manhã, totalizando dez encontros com duração de quatro horas cada. Sob a supervisão e orientação dos professores do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática, o Promat acolheu estudantes das três séries do Ensino Médio da rede pública de ensino, provenientes não apenas de Cascavel, mas também de regiões circunvizinhas. Além disso, participaram do projeto alunos ingressantes no curso de Matemática e de outros cursos da Unioeste.

Ao longo desses dez encontros, nos dedicamos ao ensino de conteúdos pertinentes ao Ensino Médio, destacando-se problemas característicos de vestibulares e do ENEM. O objetivo primordial consistiu em preparar os alunos para essas avaliações, elucidar suas dúvidas e, simultaneamente, cultivar o apreço pela Matemática.

O projeto revelou-se uma experiência enriquecedora para todos os envolvidos, representando uma oportunidade valiosa para os alunos ampliarem seus conhecimentos. Para nós, estagiários, foi a oportunidade de aprimorar nossas habilidades e adquirir prática, essencial para nos prepararmos para a futura função docente.

3. USO DOS JOGOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

3.1 INTRODUÇÃO

A intersecção entre a Psicologia do Jogo e o ensino da Matemática revela-se como uma área de pesquisa fundamental diante dos desafios encontrados no processo educacional. A dificuldade em despertar o interesse dos alunos por conteúdos considerados maçantes e complexos, especialmente no caso da Matemática, é uma realidade amplamente reconhecida (Lacanallo e Mori, 2016). A naturalização da ideia de que a Matemática é uma disciplina difícil contribui para a formação de barreiras que impedem a aprendizagem, conforme observado por esses autores.

Diante desse cenário, Lacanallo e Mori (2016) propõem a utilização do jogo como uma ferramenta para reverter experiências negativas e criar novas abordagens de ensino. No entanto, ressaltam que o jogo, por si só, não é suficiente e defendem a necessidade de uma reestruturação abrangente e dialética do processo de ensino. Essa perspectiva é corroborada pela teoria histórico-cultural, que relaciona o jogo com questões de aprendizagem e desenvolvimento.

Neste contexto, a presente pesquisa explora a natureza psicológica do jogo, destacando a perspectiva de Jean Piaget no ensino da Matemática. Piaget, precursor da teoria construtivista, enfatizou a importância dos jogos, brincadeiras e atividades lúdicas no desenvolvimento e aprendizagem infantil Sua teoria estrutura-se em processos como assimilação, acomodação e equilibração, delineando um percurso de desenvolvimento cognitivo.

A fim de aplicar esses conceitos de forma prática, desenvolvemos uma experiência centrada no jogo de cobras e escadas, alinhado com a proposta de explorar o potencial dos jogos no contexto educacional. A escolha desse jogo específico foi embasada em sua capacidade de engajar os alunos, oferecendo uma abordagem lúdica e interativa para o aprendizado matemático. A adaptação do jogo incluiu questões que exigiam a modelagem de equações e a resolução de sistemas lineares, proporcionando uma oportunidade para o desenvolvimento de habilidades conceituais.

3.2 A PSICOLOGIA DO JOGO E SEU IMPACTO NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Percebe-se que é bem difícil trazer o interesse dos alunos com conteúdo maçante e explicações longas. De acordo com Lacanallo e Mori (2016, p. 662)

> É possível identificar nos discursos o quanto a ideia de matemática como uma ciência difícil é naturalizada e inquestionável para muitos. Os alunos expressam o grau de dificuldade diante das tarefas propostas, verbalizam experiências negativas com a disciplina, criando barreiras que as afastam da condição e possibilidade de aprendizagem.

De acordo com Lacanallo e Mori (2016), propor o uso do jogo como meio de reverter essas situações de não aprendizagem é algo considerado aceitável por esses indivíduos, embora seja inicialmente crucial para a construção de novas abordagens de ensino, isso, por si só, não é suficiente. É imperativo buscar uma reestruturação abrangente e dialética do processo de ensino, dessa forma, o jogo será compreendido como um recurso metodológico essencial na organização do ensino de matemática, concebendo-o não como algo isolado das demais questões relacionadas à atividade humana. Lacanallo e Mori (2016, p. 663) ainda enfatiza que “Falar de jogo implica, na perspectiva histórico-cultural, relacioná-lo com questões de aprendizagem e desenvolvimento.”

Segundo Lacanallo e Mori (2016, pág. 663):

> Os pressupostos da teoria histórico-cultural, a primeira constatação que se faz é que a infância tem um caráter histórico e cada idade tem peculiaridades próprias que se modificam com o decorrer da vida.

Elkonin (1998), que serviu como base teórica de Lacanallo e Mori, analisou a essência que permeia a infância até a adolescência, destacando que a investigação dos aspectos evolutivos do pensamento, linguagem e personalidade, juntamente com as peculiaridades dos processos de aquisição da leitura e escrita, deve ser conectada às questões inerentes à educação e ao ensino.

Os trabalhos do autor tornaram-se uma teoria sobre os jogos e Elkonin (1998, p. 9) espera:

> [...] proceder a uma análise crítica e histórica das teorias fundamentais do jogo [...] cujo objetivo principal é revelar a inconsistência do enfoque naturalista do jogo, predominante nas principais teorias propostas em outros países, contrapondo-lhe o enfoque sócio-histórico da origem e desenvolvimento do jogo humano, sem o qual tampouco se pode compreender a sua natureza psicológica.

Para Lacanallo e Mori (2016), a compreensão das operações mentais necessárias para a formação de conceitos. Ele destaca a autonomia do aluno na realização dessas operações, progredindo desde a orientação inicial até a constituição definitiva da operação mental. Essa abordagem é cuidadosamente incorporada à proposta pedagógica, que reconhece o jogo como uma atividade que não apenas motiva, mas também possibilita a realização dessas operações mentais, promovendo uma verdadeira imersão na formação conceitual.

3.3 EXPLORANDO A NATUREZA PSICOLÓGICA DO JOGO: UMA PERSPECTIVA À LUZ DE JEAN PIAGET PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

De acordo com Oliveira e Albrecht (2021), Jean Piaget, um dos precursores da teoria construtivista, dedicou-se a desbravar os intricados caminhos da cognição humana, focalizando especialmente o desenvolvimento infantil. Desde o nascimento até a fase adulta, Piaget delineou um percurso marcado por processos fundamentais: assimilação, acomodação e equilibração, que constituem a essência da construção do conhecimento. Sua observação aguçada levou-o a notar padrões comuns de erros entre crianças da mesma faixa etária, catalisando a elaboração de uma teoria estruturada em quatro períodos cruciais.

Segundo Oliveira e Albrecht (2021, p. 05):Z

> Piaget e sua teoria do construtivismo de desenvolvimento intelectual e as fases do desenvolvimento, teve uma grande contribuição para a educação, em especial no Brasil, a partir da década de 1980, o qual criou condições de se pensar no processo de ensino-aprendizado do aluno, o qual levou professores a planejarem atividades adequadas para a sua faixa etária e fase do desenvolvimento de cada criança.

De acordo com Oliveira e Albrecht, Piaget conferiu uma significativa importância aos jogos, brincadeiras e atividades lúdicas no processo de desenvolvimento e aprendizagem. Para ele, “o conceito de jogo envolvia a ação de brincar, sendo uma atividade intrinsecamente ligada à infância e de fundamental importância para o desenvolvimento e aprendizado da criança. Piaget categorizou o jogo em três tipos distintos: o jogo simbólico, o de regra e o de exercício.” (citado por Oliveira e Albrecht 2021, p. 06).

Ainda por Oliveira e Albrecht, os jogos de exercício caracterizam-se como atividades na primeira infância, em que o bebê manipula objetos por meio de ações repetitivas, visando seu próprio prazer. Entre os 2 e 4 anos, emergem os jogos simbólicos, marcados pelo faz de conta, nos quais a criança utiliza a imaginação para representar situações e comportamentos. Essa fase revela-se de importância crucial, pois é nela que a criança desenvolve habilidades fundamentais, como a leitura e a escrita.

Segundo Piaget, conforme citado por Oliveira e Albrecht (2021, p. 06) “através dos jogos de regras, as atividades lúdicas atingem um caráter educativos, tanto na formação psicomotora, como também na formação da personalidade da criança”. Para Oliveira e Albrecht, Piaget entendia o jogo com algo do dia a dia, por conta disso a assimilação é natural.

> Ao longo de sua extensa obra sobre jogos e brincadeiras, Piaget define o jogo como algo natural, ao próprio da criança, do seu dia a dia, mas que não são apenas um meio de diversão e entretenimento, mas sim um tempo de um aprendizado e desenvolvimento intelectual. Quando as crianças jogam eles assimilam e podem transformar a sua realidade. O professor quando proporciona atividades lúdicas através de jogos e brincadeiras está desenvolvendo no aluno o seu conhecimento, seu caráter e sua forma de se relacionar com outras pessoas.

3.4 EXPERIÊNCIA PRÁTICA

Na busca por estratégias inovadoras para o ensino da matemática, implementamos a atividade prática centrada no jogo de cobras e escadas. Este jogo foi escolhido devido à sua capacidade de engajar os alunos, proporcionando uma abordagem lúdica e interativa para o aprendizado matemático. A escolha do jogo está alinhada com a proposta de explorar o potencial dos jogos no contexto educacional.

O objetivo principal desta experiência foi investigar como o jogo de cobras e escadas poderia favorecer a formação do pensamento teórico dos alunos no âmbito matemático. Buscamos criar um ambiente dinâmico que estimulasse o desenvolvimento de habilidades conceituais, especialmente na modelagem e resolução de equações, além de proporcionar uma oportunidade para aprimorar a capacidade matemática dos participantes.

Segundo Grando (2007, pág. 04), esse objetivo caracteriza um dos sete momentos de intervenção pedagógicas.

> Intervenção pedagógica verbal: Depois dos três momentos anteriores, os alunos passam a jogar agora contando com a intervenção propriamente dita. Trata-se das intervenções que são realizadas verbalmente, pelo orientador da ação, durante o movimento do jogo. Este momento caracteriza-se pelos questionamentos e observações realizadas pelo orientador da ação a fim de provocar os alunos para a realização das análises de suas jogadas (previsão de jogo, análise de possíveis jogadas a serem realizadas, constatação de "jogadas erradas" realizadas anteriormente etc.). Neste momento, a atenção está voltada para os procedimentos criados pelos sujeitos na resolução dos problemas de jogo, buscando relacionar este processo à conceitualização matemática.

O jogo de cobras e escadas foi escolhido por sua versatilidade e capacidade de integração com os conceitos matemáticos. Optamos por adaptar o jogo, incorporando questões que exigiam a modelagem de equações e resolução de sistemas lineares. Esta adaptação foi realizada com o objetivo de criar uma experiência que atendesse aos objetivos educacionais propostos.

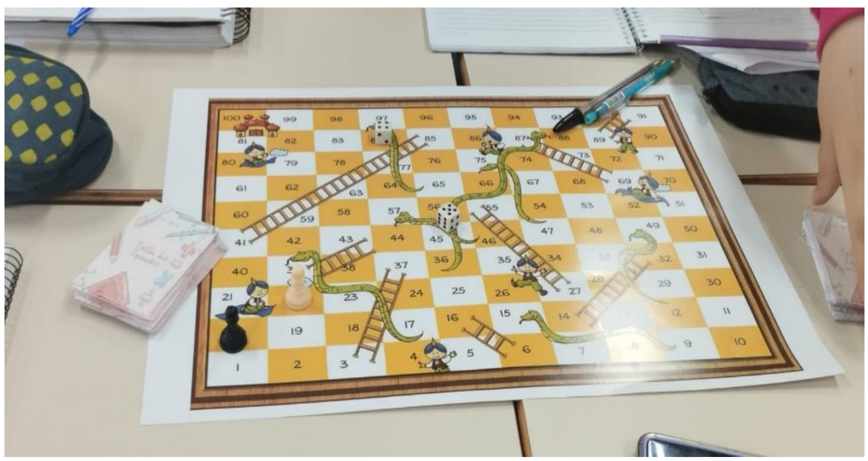
A experiência foi conduzida em grupos de quatro alunos, cada um recebendo um tabuleiro, cartões e dados. A dinâmica do jogo foi explicada, e os alunos foram encorajados a trabalhar colaborativamente. A presença de quatro estagiários permitiu um suporte individualizado, garantindo que cada grupo recebesse a atenção necessária.

Conforme Macedo (citado por Grando, 2007, p. 05):

> A discussão desencadeada a partir de uma situação de jogo, mediada por um profissional, vai além da experiência e possibilita a transposição das aquisições para outros contextos. Isto significa considerar que as atitudes adquiridas no contexto de jogo tendem a tornar-se propriedade do aluno, podendo ser generalizadas para outros âmbitos, em especial, para as situações de sala de aula.

Durante a atividade, observamos um envolvimento significativo dos alunos, evidenciado pelo uso efetivo de mapas mentais e anotações do quadro para modelagem e resolução de equações. Surgiram dúvidas, especialmente nas questões que exigiam a formulação de equações e a resolução de sistemas lineares, indicando áreas que poderiam ser mais exploradas em futuras atividades.

Figura 1: Alunos brincando com o jogo das escadas e serpentes



Fonte: acervo dos estagiários

Ao analisar os resultados à luz das teorias de Piaget (1978) e Elkonin (1998), podemos destacar como o jogo de cobras e escadas se tornou uma ferramenta pedagógica que promoveu o desenvolvimento cognitivo dos alunos, proporcionando uma abordagem prática e dinâmica para a aprendizagem matemática.

3.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em síntese, a aplicação de jogos no ensino da matemática emerge como uma estratégia pedagógica enriquecedora e transformadora. Ao considerar as contribuições de renomados teóricos, como Piaget e Elkonin, percebemos que os jogos não são meramente instrumentos manipuláveis, mas sim um elemento intrínseco ao desenvolvimento cognitivo e cultural dos alunos.

A compreensão do jogo como atividade lúdica transcende a mera diversão, ganhando relevância na formação da cultura e na criação de representações mentais. O uso do jogo na educação matemática não é apenas uma estratégia para tornar o aprendizado mais atraente, mas também uma ferramenta que permite aos alunos assimilar, transformar e criar um conhecimento sólido. A análise prática da experiência com o jogo de cobras e escadas revelou um envolvimento significativo dos alunos, destacando a eficácia do jogo como uma abordagem dinâmica para o ensino de conceitos matemáticos.

Diante disso, a proposta de integração dos jogos no processo de ensino mostra-se promissora, contribuindo não apenas para o desenvolvimento cognitivo, mas também para a formação de habilidades conceituais e a superação das barreiras percebidas em relação à matemática. No entanto, é crucial reconhecer que o uso eficaz dos jogos requer uma abordagem pedagógica abrangente, considerando o contexto cultural, a diversidade de aprendizes e a integração cuidadosa com os objetivos educacionais.

Assim, ao explorar a complexidade da atividade lúdica e sua influência na formação cultural, este estudo propõe uma reflexão mais profunda sobre o papel transformador dos jogos no ensino da matemática, destacando sua capacidade de transcender a dicotomia entre jogo e trabalho. Ao reconhecer o potencial dos jogos como instrumentos pedagógicos valiosos, esperamos contribuir para uma abordagem mais inovadora e eficaz no ensino da matemática, promovendo uma verdadeira imersão na formação conceitual dos alunos.

3.6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ELKONIN, D. B. **Psicologia do jogo.** São Paulo: Martins Fontes, 1998.

GRANDO, Regina Célia. **O Jogo e suas Possibilidades Metodológicas no Processo Ensino-Aprendizagem da Matemática. Dissertação (Mestrado em Educação).** Campinas, SP, FE/ UNICAMP, 1995, 175p.

GRANDO, Regina Célia. **Concepções Quanto ao Uso de Jogos no Ensino da Matemática.** Disponível em: CONCEPÇÕES QUANTO AO USO DE JOGOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA (usp.br). Acesso em 18. Out de 2023.

LACANALLO, Luciana Figueiredo; MORI, Nerli Nonato Ribeiro. "**Psiu, estou jogando!!": o jogo no ensino da Matemática.** Disponível em: Vista do "Psiu, estou jogando!!": o jogo no ensino da Matemática (pucpr.br). Acesso em 17. Out de 2023.

OLIVEIRA, Denise Neumann; ALBRECHT, Ana Rosa Massolin. **Uso de Jogos e Brincadeiras para o Desenvolvimento e Aprendizagem.** Disponível em: https://repositorio.uninter.com/bitstream/handle/1/746/USODEJ~1.PDF?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em 18. Out de 2023.

4. ENCONTRO I

4.1 PLANO DE AULA - ENCONTRO I

Público-alvo: Alunos de todos os anos do Ensino Médio da rede pública estadual do Paraná.

Estagiários: Luiza Stunder, Márcio Vinícius Rocha Miranda, Raianny Vitória Zerneh, Theo Fernando Bonfim da Luz

Conteúdos: Frações, números decimais, razão e proporção.

Objetivo geral: Revisar os conteúdos listados acima e utilizá-los na resolução de problemas.

Objetivos específicos:

- Compreender as relações de equivalência de frações;
- Efetuar operações com frações próprias e impróprias;
- Realizar operações com números decimais;
- Identificar situações cuja resolução possa utilizar os conceitos de razão e proporção.

Tempo de execução: 3h e 20 minutos.

Recursos didáticos: Quadro, giz, atividades impressas, papel cartão, varal numérico, grampos, lápis, borracha, caderno.

Encaminhamento metodológico:

Os alunos serão recebidos na porta da sala de aula por um estagiário, momento em que receberão um cartão indicando uma coordenada cartesiana e um número racional em forma de fração ou decimal. Cada aluno deverá se sentar na carteira correspondente à coordenada escrita no cartão. A carteira no centro da sala será $(0,0)$.

(5 minutos)

Com os alunos já alocados, os estagiários solicitarão que os alunos escrevam uma apresentação em um cartão, depois os cartões serão recolhidos, embaralhados e entregues de forma aleatória para os alunos. Cada aluno lerá a apresentação do cartão e o aluno que escreveu se identificará para a turma até que todos tenham sido apresentados.

(10 minutos)

Em seguida, será realizada uma dinâmica em conjunto com os alunos chamada "O Varal dos Números". O objetivo desta dinâmica é comparar valores racionais, em forma decimal e fracionada.

Resumo da dinâmica – O varal dos números:

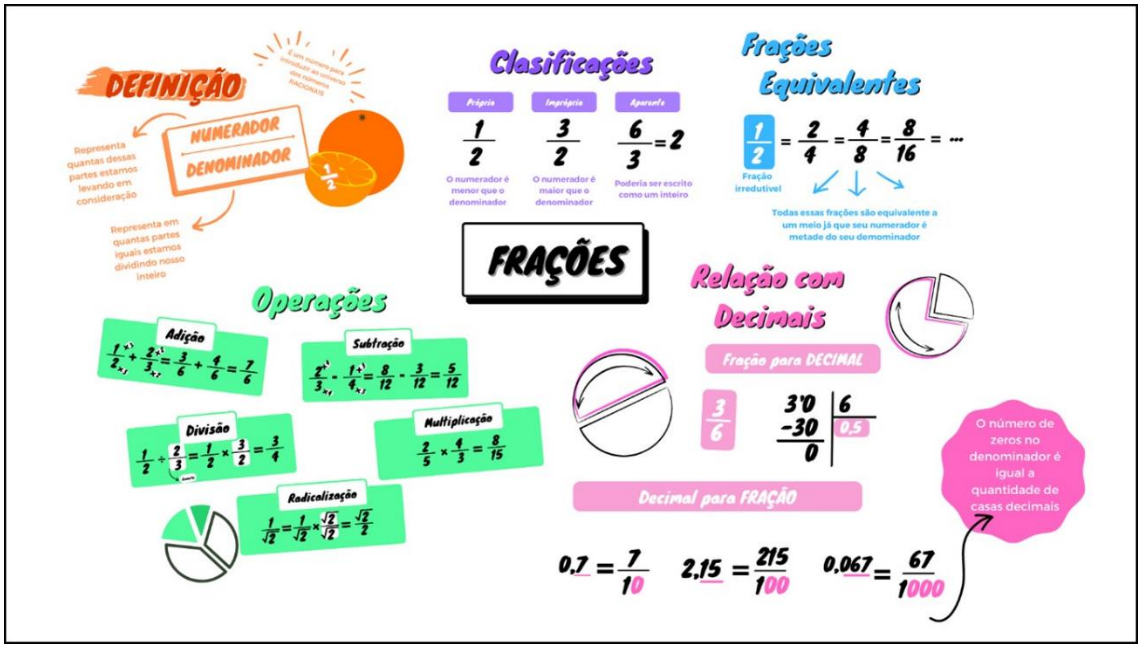
- Um barbante será amarrado em duas carteiras, formando um varal;
- Um estagiário colocará o cartão “0” no varal, para referência dos alunos;
- Um estagiário entregará os grampos para que os alunos coloquem o cartão no varal, representado pelo barbante esticado;
- Então, os estagiários solicitarão que os alunos se levantem e grampeiem os números racionais recebidos na porta em ordem crescente no varal;
- Os números informados em cada cartão serão os do apêndice I.

(10 minutos)

Após a dinâmica, os alunos retornarão às suas cadeiras para uma breve análise do varal construído.
Em seguida, entregaremos um mapa mental contendo conceitos de frações (anexo I). Explicaremos o conceito de fração de maneira simples, como uma fração é uma maneira de dividir algo em partes iguais.

(10 minutos)

Figura 2: Mapa mental sobre frações

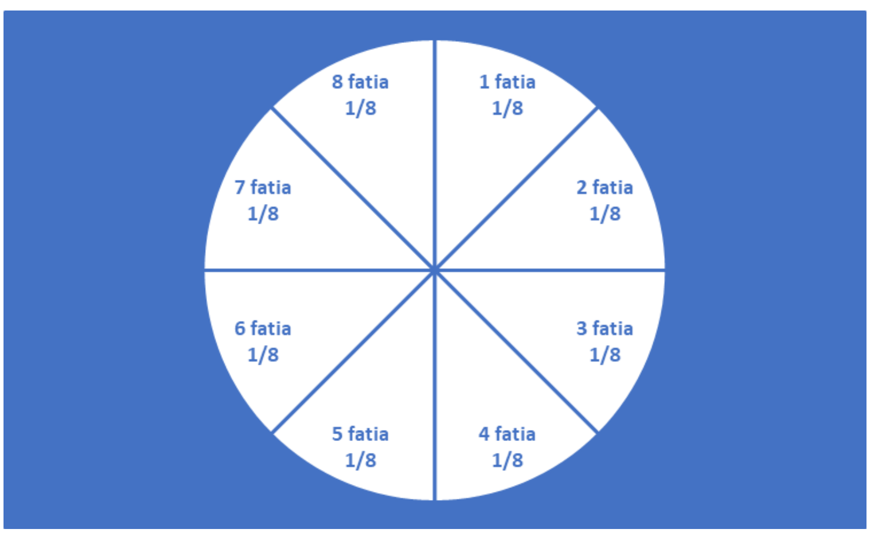


Fonte: https://no.descomplica.com.br/fracoes.

Exemplo: Como podemos dividir uma pizza em fatias iguais?

Resolução: Podemos dividir uma pizza em quatro ou oito fatias iguais, cada uma delas representando $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{8}$.

Figura 3: Representação visual sobre frações



Fonte: Acervo dos estagiários

Após o exemplo, entregaremos a Lista I para resolvermos alguns problemas relacionados ao tema abordado.

Problema 1. Sabrina gosta de correr todos os dias por uma pista de 900m. Em um dia ela correu $\frac{2}{3}$ do total da pista e fez uma pausa, depois caminhou mais $\frac{7}{6}$ antes de uma segunda pausa. Qual a fração que corresponde a distância que ela correu até a segunda pausa?

Resolução: Devemos somar as distâncias dos dois períodos em que Sabrina correu, ou seja,

$$\frac{2}{3}+\frac{7}{6}=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{2}\right)+\frac{7}{6}=\frac{4}{6}+\frac{7}{6}=\frac{11}{6}$$

Sabrina correu $\frac{11}{6}$ da pista.

Daremos 5 minutos para que os alunos resolvam e posteriormente faremos a resolução no quadro.

Problema 2. (Enem 2017 Adaptado) Em uma cantina, o sucesso de vendas no verão são sucos preparados à base de polpa de frutas. Um dos sucos mais vendidos é o de morango com acerola, que é preparado com $\frac{2}{3}$ de polpa de morango e $\frac{1}{3}$ de polpa de acerola. Para o comerciante, as polpas são vendidas em embalagens de igual volume. Atualmente, a embalagem da polpa de morango custa R$ 18,00 e a de acerola, R$ 14,70. Porém, está prevista uma alta no preço da embalagem da polpa de acerola no próximo mês, passando a custar R$ 15,30. Para não aumentar o preço do suco, o comerciante negociou com o fornecedor uma redução no preço da embalagem da polpa de morango. A redução, em real, no preço da embalagem da polpa de morango deverá ser de quanto?

Resolução: Custo do suco antes do aumento:

Morango:

$$\frac{2}{3}\cdot 18=12$$

Acerola:

$$\frac{1}{3} \cdot 14{,}7 = \frac{14{,}7}{3} = 4{,}9$$

Custo total do suco:

$$Custo\ da\ acerola + custo\ do\ morango = 12 + 4{,}90 - 16{,}90$$

Para que não haja alteração no preço final do suco o preço de custo precisa permanecer constate, porém com o aumento de preço da polpa de acerola em 60 centavos, temos:
Acerola:

$$\frac{1}{3} \cdot 15{,}3 = \frac{15{,}3}{3} = 5{,}1$$

Então o custo do suco de morango precisa ser:
Morango:

$$16{,}90 - 5{,}10 = 11{,}80$$
$$\frac{2}{3}y = 11{,}80$$
$$2y = 35{,}40$$
$$y = 17{,}70$$

Logo, o desconto no preço da polpa de morango deve ser de R$ 0,30

Disponibilizaremos 10 minutos para que os alunos resolvam o problema e logo após o intervalo, forneceremos a resolução em sala de aula.
Após o retorno do intervalo, resolveremos a questão no quadro junto com os alunos.

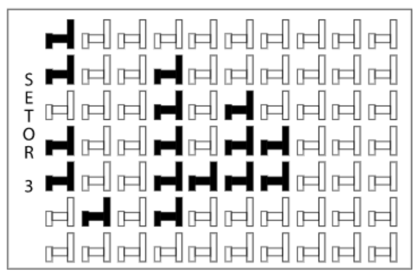
Abordaremos razão e proporção através de pequenos cartões com frações. Quatro dessas frações serão proporcionais e a partir delas, pediremos que os alunos se dividam em grupos. Exemplo: o aluno que tirar $\frac{2}{4}$ fará parte do grupo com quem tirar $\frac{3}{6}$.

(5 minutos)

Após a divisão dos grupos, introduziremos um problema sobre o assunto para verificar o entendimento por parte dos alunos.

Problema 3. (Enem 2013 adaptada) Em um certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas. A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é?

Figura 4: quantidade de cadeiras reservadas e vacantes



Fonte: INEP

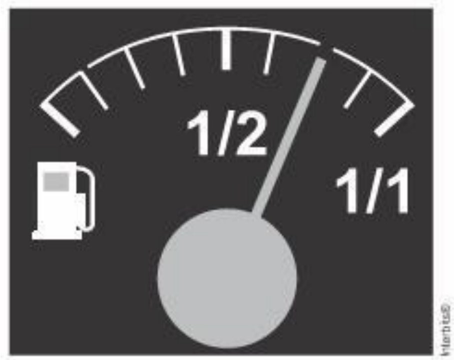
Resolução:

Sabendo que o setor 3 possui um total de 70 cadeiras (7 linhas x 10 colunas) e foram reservadas 16 poltronas (cor escura), temos a razão dada por:

$$\frac{16}{70} = \frac{8}{35}$$

Problema 4. (Enem 2016 adaptada) No tanque de um certo carro de passeio cabem até 50L de combustível, e o rendimento médio deste carro na estrada é de 15 km/L de combustível. Ao sair para uma viagem de 600 km, o motorista observou que o marcador de combustível estava exatamente sobre uma das marcas da escala divisória do medidor, conforme figura a seguir.

Figura 5: quantidade de combustível em fração



Fonte: INEP

Como o motorista conhece o percurso, sabe que existem, até a chegada a seu destino, cinco postos de abastecimento de combustível, localizados a 150 km, 187 km, 450 km, 500 km e 570 km do ponto de partida.

Qual a máxima distância, em quilômetro, que poderá percorrer até ser necessário reabastecer o veículo, de modo a não ficar sem combustível na estrada?

Resolução:

O marcador de consumo de combustível indica que foram gastos $\frac{1}{4}$ do combustível, logo resta $\frac{3}{4}$. Como no tanque cabem 50 litros e o automóvel faz 15 km/L, com um tanque, é possível percorrer $50 \times 15 = 750\ km$. Agora basta calcular $\frac{3}{4}$ de 750:

Cálculo de $\frac{3}{4}$ do valor de 750 para determinar distância que pode ser percorrida $\frac{3}{4} \cdot 750 = 562{,}5$

Atividade para a próxima aula: "Meu Dia em Frações" usando as atividades diárias dos alunos com uma fração.

Resumo da dinâmica – Meu dia em frações:

- Cada aluno listará suas atividades diárias em ordem cronológica, como acordar, café da manhã, ir à escola, almoçar, aula de matemática, recreio, entre outras.
- Eles registarão o tempo gasto em cada atividade, em minutos.

- Peça aos alunos que escolham duas atividades para começar. Por exemplo, "ir à escola" e "aula de matemática".
- Os estagiários deverão ajudá-los a criar uma fração que represente o tempo gasto em cada atividade em relação ao tempo total do dia. Por exemplo, se eles gastaram 60 minutos na escola e 45 minutos na aula de matemática, a fração para "ir à escola" seria $\frac{60}{1440}$ e para "aula de matemática" seria $\frac{45}{1440}$.

Aguardamos os alunos terminarem e em seguida, um estagiário apresentará sua divisão diária em forma de fração e pediremos que alguns alunos expliquem como realizaram a atividade.

4.2 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

RIBEIRO, Marcelo. **Fração**. Projeto Agatha, 2023. Disponível em: https://www.projetoagathaedu.com.br/questoes-enem/matematica/fracao.php. Acesso em: 04 set. 2023.

RODRIGUES, Camila. **+Razões e proporções.** Slideshare, 2014**.** Disponível em: https://pt.slideshare.net/camilarodrigues35912672/razes-e-propores-30251873. Acesso em: 04 set. 2023.

Triminó das Frações. Universidade Federal de Santa Catarina. Disponível em: https://lema.ufsc.br/2019/07/30/trimino-de-fracoes. Acesso em: 10 set. 2023

4.3 MATERIAL UTILIZADO

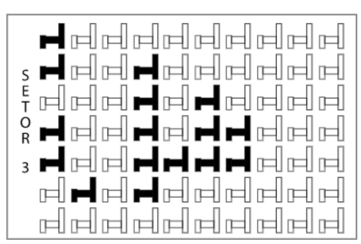
Problemas feitos em sala

Problema 1. Sabrina gosta de correr todos os dias por uma pista de 900m. Em um dia ela correu $\frac{2}{3}$ do total da pista e fez uma pausa, depois caminhou mais $\frac{7}{6}$ antes de uma segunda pausa. Qual a fração que corresponde a distância que ela correu até a segunda pausa?

Problema 2. (Enem 2017 Adaptado) Em uma cantina, o sucesso de vendas no verão são sucos preparados à base de polpa de frutas. Um dos sucos mais vendidos é o de morango com acerola, que é preparado com $\frac{2}{3}$ de polpa de morango e $\frac{1}{3}$ de polpa de acerola. Para o comerciante, as polpas são vendidas em embalagens de igual volume. Atualmente, a embalagem da polpa de morango custa R$ 18,00 e a de acerola, R$ 14,70. Porém, está prevista uma alta no preço da embalagem da polpa de acerola no próximo mês, passando a custar R$ 15,30. Para não aumentar o preço do suco, o comerciante negociou com o fornecedor uma redução no preço da embalagem da polpa de morango. A redução, em real, no preço da embalagem da polpa de morango deverá ser de quanto?

Problema 3. (Enem 2013 adaptada) Em um certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas. A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é?

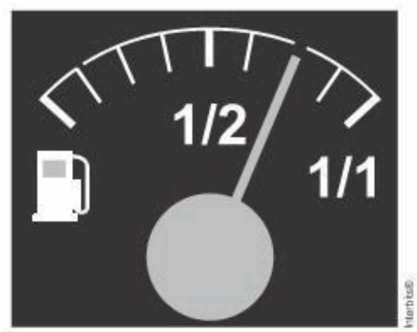
Figura 6: quantidade de cadeiras reservadas e vacantes



Fonte: INEP

Problema 4. (Enem 2016 adaptada) No tanque de um certo carro de passeio cabem até 50L de combustível, e o rendimento médio deste carro na estrada é de 15 km/L de combustível. Ao sair para uma viagem de 600 km, o motorista observou que o marcador de combustível estava exatamente sobre uma das marcas da escala divisória do medidor, conforme figura a seguir.

Figura 7: quantidade de combustível em fração



Fonte: INEP

Como o motorista conhece o percurso, sabe que existem, até a chegada a seu destino, cinco postos de abastecimento de combustível, localizados a 150 km, 187 km, 450 km, 500 km e 570 km do ponto de partida.

Qual a máxima distância, em quilômetro, que poderá percorrer até ser necessário reabastecer o veículo, de modo a não ficar sem combustível na estrada?

Lista de dever de casa 1: frações, decimais, razão e proporção

1. (Enem 2016 - Adaptada) Até novembro de 2011, não havia uma lei específica que punisse fraude em concursos públicos. Isso dificultava o enquadramento dos fraudadores em algum artigo específico do Código Penal, fazendo com que eles escapassem da Justiça mais facilmente. Entretanto, com o sancionamento da Lei 12.550/11, é considerado crime utilizar ou divulgar indevidamente o conteúdo sigiloso de concurso público, com pena de reclusão de 12 a 48 meses (1 a 4 anos). Caso esse crime seja cometido por um funcionário público, a pena sofrerá um aumento de $\frac{1}{3}$.

Se um funcionário público for condenado por fraudar um concurso público, qual será a variação possível de sua pena?

2. (Enem 2016 - Adaptada) Nas construções prediais são utilizados tubos de diferentes medidas para a instalação da rede de água. Essas medidas são conhecidas pelo seu diâmetro, muitas vezes medido em polegada. Alguns desses tubos, com medidas em polegada, são os tubos de 1/2, 3/8 e 5/4.

Como devemos organizar estas medidas de modo que fiquem em ordem crescente?

3. (Enem 2015 - Adaptada) No contexto da matemática recreativa, utilizando diversos materiais didáticos para motivar seus alunos, uma professora organizou um jogo com um tipo de baralho modificado. No início do jogo, vira-se uma carta do baralho na mesa e cada jogador recebe em mãos nove cartas. Deseja-se formar pares de cartas, sendo a primeira carta a da mesa e a segunda, uma carta na mão do jogador, que tenha um valor equivalente àquele descrito na carta da mesa. O objetivo do jogo é verificar qual jogador consegue o maior número de pares. Iniciado o jogo, a carta virada na mesa e as cartas da mão de um jogador são como no esquema:

Figura 8: Mão de um dos jogadores no início do jogo

Fonte: INEP

Segundo as regras do jogo, quantas cartas da mão desse jogador podem formar um par com a carta da mesa?

4. (Enem Digital 2020) É comum as cooperativas venderem seus produtos a diversos estabelecimentos. Uma cooperativa láctea destinou 4 m3 de leite, do total produzido, para análise em um laboratório da região, separados igualmente em 4000 embalagens de mesma capacidade.

Qual o volume de leite, em mililitro, contido em cada embalagem?

a) 0,1 b) 1,0 c) 10,0 d) 100,0 e) 1000,0

5. (Enem 2021 – Adaptada) A fim de reforçar o orçamento familiar, uma dona de casa começou a produzir doces para revender. Cada receita é composta de 4/5 de quilograma de amendoim e 1/5 de quilograma de açúcar. O quilograma de amendoim custa R$ 10,00 e o do açúcar, R$ 2,00. Porém, o açúcar teve um aumento e o quilograma passou a custar R$ 2,20. Para manter o custo com a produção de uma receita, essa dona de casa terá que negociar um desconto com o fornecedor. Nas condições estabelecidas, qual deverá ser o novo valor do quilograma de amendoim?

6. (Enem 2021 – Adaptada) Foi feita uma pesquisa sobre a escolaridade dos funcionários de uma empresa. Verificou-se que 1/4 dos homens que ali trabalham têm o ensino médio completo, enquanto 2/3 das mulheres que trabalham na empresa têm o ensino médio completo. Constatou-se, também, que entre todos os que têm o ensino médio completo, metade são homens.

Qual fração representa o número de funcionários homens em relação ao total de funcionários dessa empresa?

7. (Enem 2014 - Adaptada) Boliche é um jogo em que se arremessa uma bola sobre uma pista para atingir dez pinos, dispostos em uma formação de base triangular, buscando derrubar o maior número de pinos. A razão entre o total de vezes em que o jogador derruba todos os pinos e o número de jogadas determina seu desempenho.

Em uma disputa entre cinco jogadores, foram obtidos os seguintes resultados:

- Jogador I – Derrubou todos os pinos 50 vezes em 85 jogadas.
- Jogador II – Derrubou todos os pinos 40 vezes em 65 jogadas.
- Jogador III – Derrubou todos os pinos 20 vezes em 65 jogadas.
- Jogador IV – Derrubou todos os pinos 30 vezes em 40 jogadas.
- Jogador V – Derrubou todos os pinos 48 vezes em 90 jogadas.

Qual desses jogadores apresentou maior desempenho?

Frações equivalentes

$$\frac{27}{63} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{9}{21} \quad \frac{63}{147}$$

$$\frac{2}{4} \quad \frac{64}{128} \quad \frac{800}{1600} \quad \frac{38}{76}$$

$$\frac{1}{3} \quad \frac{36}{108} \quad \frac{108}{324} \quad \frac{27}{81}$$

$$\frac{1}{7} \quad \frac{14}{98} \quad \frac{35}{245} \quad \frac{2}{14}$$

$$\frac{11}{88} \quad \frac{2}{16} \quad \frac{9}{72} \quad \frac{7}{56}$$

$$\frac{30}{50} \quad \frac{60}{100} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{15}{25}$$

$$\frac{1}{11} \quad \frac{11}{121} \quad \frac{13}{143} \quad \frac{6}{66}$$

$$\frac{2}{12} \quad \frac{4}{24} \quad \frac{6}{36} \quad \frac{60}{360}$$

4.4 RELATÓRIO DO ENCONTRO I

No sábado, 16 de setembro de 2023, às 8 horas da manhã, ocorreu o primeiro encontro do PROMAT na Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE. Este encontro foi ministrado pelos estagiários Luiza Stunder, Márcio Miranda, Raianny Zerneh, Theo da Luz, e teve como foco o ensino de frações, decimais, razão e proporção para o ENEM e vestibular, direcionado a alunos do ensino médio ou aqueles que planejam realizar essas provas. Na sala, estiveram presentes 32 alunos.

Antes de iniciar a aula foi decidido não utilizar as dinâmicas inicialmente planejadas para o início da aula, pois julgou-se que tomaria muito tempo de preparo e poderiam não ser tão produtivas e divertidas para os alunos, sendo assim, o encontro foi iniciado com uma dinâmica de apresentação dos alunos, que compartilharam seus nomes, idades, instituições de ensino, ano escolar e as motivações para participar do Promat. Acreditou-se que isso promoveria maior interação na turma. Posteriormente, os estigários apresentaram-se e introduziram o orientador professor Jesus Marcos.

Em seguida, foi distribuído um mapa mental que seria usado para explicar os conceitos de fração. Percebeu-se que ele não foi utilizado da melhor maneira possível, resultando em uma explicação extensa e monótona. Em determinado momento, o professor orientador interveio, pois os estagiários estavam abordando tópicos de maneira que poderia gerar confusão nos alunos. Os estagiários tentaram apresentar alguns exemplos, mas notou-se que parte dos alunos não conseguiu compreender completamente o conteúdo.

Após a explicação, seguiu-se para a atividade "O MEU DIA EM FRAÇÕES", na qual os alunos deveriam representar em forma fracionária quanto tempo gastam em cada uma de suas atividades diárias durante um período de 24 horas. Enquanto os alunos realizavam a atividade, os estagiários circulavam entre as mesas, sanando dúvidas e oferecendo dicas de como desenvolver a atividade. Durante essa dinâmica, notou-se uma maior interação dos alunos, tanto entre si quanto com os estagiários. Alguns participaram ativamente quando foi explicado uma maneira de como dividir o dia. Os estagiários esclareceram as dúvidas que surgiram.

Em seguida, distribuiu-se duas situações problemas para que os alunos resolvessem em grupos de quatro pessoas. Observou-se que alguns alunos tiveram dificuldade em interpretar os dados e aplicar operações, enquanto outros demonstraram habilidades sólidas em raciocínio lógico para resolver as questões. A aula foi encerrada com a resolução da segunda atividade, que gerou mais dúvidas entre os alunos.

No geral, percebeu-se que houve uma falha no planejamento e na execução do plano de aula. Também na divisão tarefas entre os membros do nosso grupo. Esta experiência serviu como lição para futuros encontros do Promat, para aprimorar a abordagem para melhorar o aprendizado dos alunos.

5. ENCONTRO II

5.1 PLANO DE AULA - ENCONTRO II

Público-alvo: Alunos de todos os anos do Ensino Médio da rede pública estadual do Paraná.

Estagiários: Luiza Stunder, Márcio Vinícius Rocha Miranda, Raianny Vitória Zerneh, Theo Fernando Bonfim da Luz

Conteúdos: Potenciação, radiciação, razão e proporção.

Objetivo geral: Revisar os conteúdos listados acima e utilizá-los para resolver questões.

Objetivos específicos:

- Identificar questões que possam ser resolvidas usando razão e proporção;
- Resolver problemas utilizando razão e proporção.
- Representar expoentes fracionários sob a forma de raiz.
- Resolver problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 3h e 20 min.

Recursos didáticos: Quadro, giz, atividades impressas, lápis, borracha, caderno.

ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO:

Retomaremos com a correção da primeira atividade da lista de exercícios, que foi realizada em sala, na aula anterior. Verificaremos se tiveram dúvidas no processo.

(15 minutos)

Triminó das frações

Para avaliar o domínio do contéudo da aula anterior será trabalhado o jogo triminó de frações com alunos. Abaixo, seguem as regras do jogo:

- O jogo deve ser trabalhado em conjunto, com grupos de quatro alunos;

- Cada jogador recebe 7 peças, totalizando 28 peças por grupo. Deve-se encaixar as peças de modo que a soma das frações em lados adjacentes de cada triângulo seja 1;
- Vence o grupo que ficar sem peças primeiro e conseguir faze todas as somas adjacentes somarem em 1.

(40 minutos)

Após o encerramento do jogo "triminó das frações", será realizada a correção da atividade 2 da lista de exercícios. A partir de tal, serão introduzidos os conceitos de razão e proporção por meio de slides que estão na seção de material utilizado.

(10 minutos)

Será, então, feita a revisão do problema 4 da lista anterior de problemas trabalhados em sala, para testar o conhecimento dos alunos:

Problema 4. (Enem 2016 adaptada) No tanque de um certo carro de passeio cabem até 50L de combustível, e o rendimento médio deste carro na estrada é de 15 km/L de combustível. Ao sair para uma viagem de 600 km, o motorista observou que o marcador de combustível estava exatamente sobre uma das marcas da escala divisória do medidor, conforme figura a seguir.

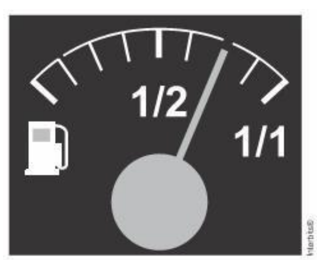


Figura 9: quantidade de combustível em fração

Fonte: INEP

Como o motorista conhece o percurso, sabe que existem, até a chegada a seu destino, cinco postos de abastecimento de combustível, localizados a 150 km, 187 km, 450 km, 500 km e 570 km do ponto de partida.

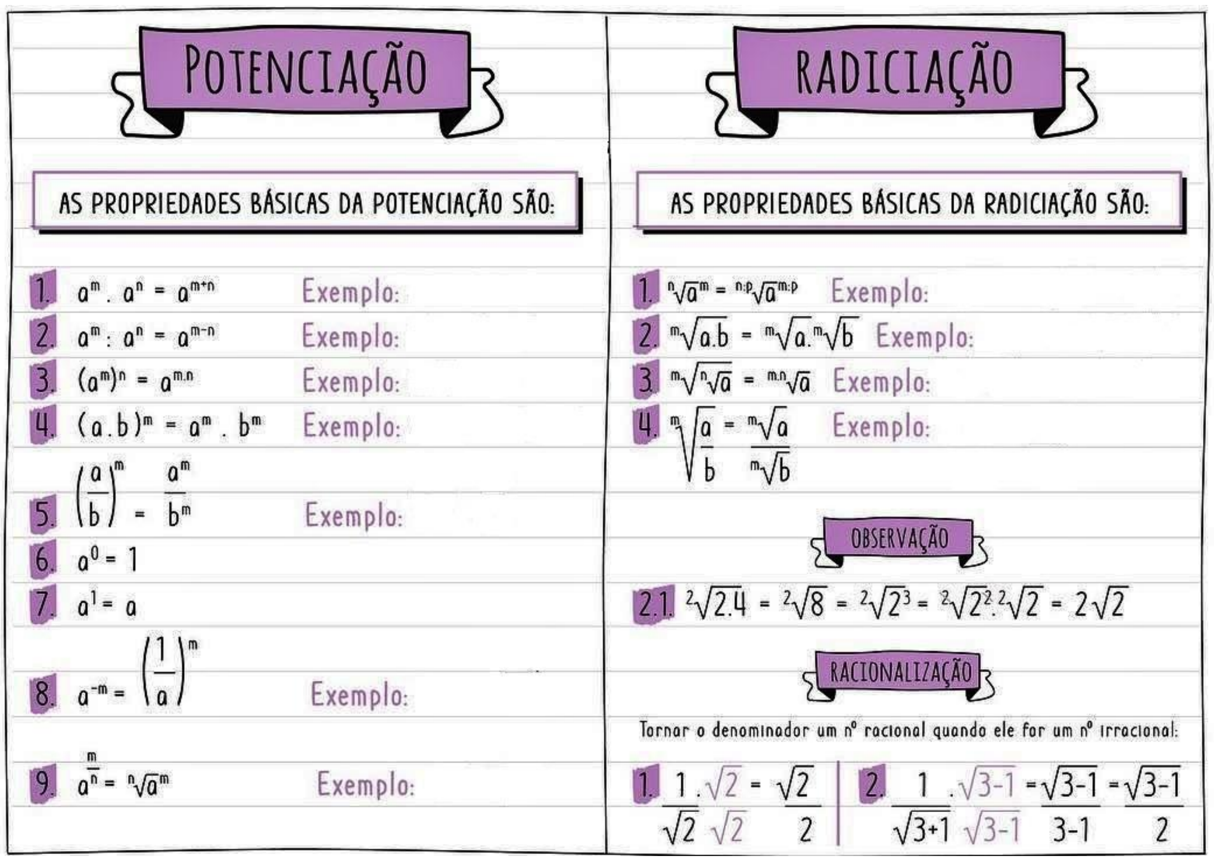
Qual a máxima distância, em quilômetro, que poderá percorrer até ser necessário reabastecer o veículo, de modo a não ficar sem combustível na estrada?

Será dado um tempo para que os alunos possam resolver a questão que depois será corrigida no quadro.

(10 minutos)

Na sequência, entregaremos aos alunos um mapa mental apresentando as propriedades de potenciação e radiciação.

Figura 10: Mapa mental de propriedades da potenciação e radiciação



Fonte: Infinittus exatas (2023)

Daremos cinco minutos para que os alunos preencham somente os exemplos de potenciação apresentados no mapa mental, então faremos a correção, explicando brevemente cada propriedade e tirando possíveis dúvidas dos alunos.

Em seguida daremos os seguintes exercícios para que sejam resolvidos:

1) Reduza a uma só potência:

a) 7×7^4 b) $3^0 \times 3^0$ c) $4^3 \times 4 \times 4^2$

d) $7^0 : 7^0$ e) $8^4 : 8^0$ f) $5^9 : 5^3$

g) $(4^3)^2$ h) $(a^3)^0$ i) $(2^7)^3$

2) Calcule o valor das expressões:

a) $70^0 + 0^{70} - 1$ b) $3^4 - 2^4 : 8 - 3 \times 4$ c) $(3 + 1)^2 + 2 \times 5 - 10^0$

d) $(7 + 4) \times (3^2 - 2^3)$ e) $3^2 : (4 - 1) + 3 \times 2^2$

Após os alunos resolverem os exercícios, será pedido que preencham os exemplos de radiciação, dispostos no mapa mental acima.

Os exemplos serão corrigidos no quadro e durante a correção, será explicado as propriedades de radiciação.

Após a explicação serão dados os seguintes exercícios para que os alunos resolvam:

3) Reduza a uma só raiz:

a) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{12} =$ b) $\sqrt{16} \times \sqrt{5} \times \sqrt{8}$ c) $\sqrt{\sqrt[4]{24}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{32}}$ e) $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{5}}$ f) $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}}$

4) Calcule o valor das raízes:

a) $\sqrt{4 \times 9}$ b) $\sqrt{\sqrt{81}}$ c) $\sqrt{\frac{16}{9}}$

Finalizado, corrigiremos os exercícios no quadro e será entregue a lista de dever de casa 2, que está disponível na seção de material utilizado na aula.

Na sequência, passeremos um jogo aos alunos, que trata-se de uma versão matemática do jogo da memória:

Regras do jogo Racionalizei!

- Este jogo consiste em dispor dez fichas sobre a mesa para os alunos observarem;
- Caso encontrem pares equivalentes devem gritar “racionalizei” e coletar as fichas;
- Quando um par é encontrado mais duas fichas devem ser dispostas na mesa, até que as fichas acabem;
- Ganha quem formar mais pares.

Figura 11: Fichas do Racionalizei!

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{4}$	3^2	$\sqrt{81}$	$\frac{3}{\sqrt{4}}$
$\frac{3}{2}$	2^4	4^2	$3^3 + 3^2$	3^5
0^0	1	$0^0 + \sqrt{4}$	$\frac{6}{2}$	$\sqrt{64}$
2^3	$\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$\frac{4}{9}$	$4^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{4}$
$\sqrt{9 \times 4}$	6	$\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$	$\frac{3}{2}$	7^1
$\sqrt{49}$	$5^6 \div 5^4$	25	$(6^2)^3$	6^6
$(3 \times 2)^5$	$3^5 + 2^5$	3^{-2}	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\sqrt{\sqrt[3]{5}}$
$\sqrt[9]{8^3}$	2	$\sqrt{9 \times 7}$	$\sqrt{9} \times \sqrt{7}$	$\sqrt[6]{5}$

Fonte: RELATÓRIO FINAL PROMAT 2022. GABRIELLA;NEVIR;THAIS;RICARDO

(50 minutos)

Para encerrar a aula, serão propostas aos alunosquestões do ENEM, que serão distribuídas aos alunos e terão suas resoluções trabalhadas em sala:

Problema 1. (Enem 2013) Muitos processos fisiológicos e bioquímicos, tais como batimentos cardíacos e taxa de respiração, apresentam escalas construídas a partir da relação entre superfície e massa (ou volume) do animal. Uma dessas escalas, por exemplo, considera que “o cubo da área S da superfície de um mamífero é proporcional ao quadrado de sua massa M”.

Isso é equivalente a dizer que, para uma constante k > 0, a área S pode ser escrita em função de M por meio da expressão:

Resolução:

Se é a área S está ao cubo na proporção, então teremos: S^3

Já a massa M está ao quadrado nessa relação, logo: M^2

Já K é a constante que relaciona proporcionalmente a área e a massa, de modo a ser expressa:

$$\boldsymbol{S^3 = K \times M^2}$$

$$\boldsymbol{\sqrt[3]{S^3} = \sqrt[3]{K} \times \sqrt[3]{M^2}}$$

$$\boldsymbol{S = K^{\frac{1}{3}} \times M^{\frac{2}{3}}}$$

Problema 2. (Enem 2012 - Adaptada) Dentre outros objetos de pesquisa, a Alometria estuda a relação entre medidas de diferentes partes do corpo humano. Por exemplo, segundo a Alometria, a área A da superfície corporal de uma pessoa relaciona-se com a sua massa m pela fórmula $A = k \cdot m^{\frac{2}{3}}$, em que k é uma constante positiva. Se no período que vai da infância até a maioridade de um indivíduo sua massa é multiplicada por 8, por quanto será multiplicada a área da superfície corporal?

Resolução:

De acordo com o problema, a massa é multiplicada por 8, teremos:

$$A = k \cdot 8^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow A = k \times 4$$

Como k é uma constante, teremos então a relação de $A = 4$

5.2 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Resolução: Potenciação e Radiciação. Projeto Agatha. Disponível em: https://www.projetoagathaedu.com.br/questoes-enem/matematica/fracao.php. Acesso em: 14 set. 2023.

Resolução: Potenciação e radiciação. Infinittus. Disponível em: https://infinittusexatas.com.br/potenciacao-e-radiciacao-principais-propriedades/ Acesso em: 14 set. 2023.

JUNIOR**,** Adalberto Batista Leite. **Potenciação e radiciação: potências com expoente fracionário**. Nova Escola. Disponível em: https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/8ano/matematica/potencias-com-expoentes-fracionarios-e-radiciacao/1532. Acesso em: 10 set. 2023

DE MELO, Rodrigo Antônio Fernandes Pires. **A noção de função como uma relação entre conjuntos.** Escola Nova. Disponível em: https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/9ano/matematica/a-nocao-de-funcao-como-uma-relacao-entre-conjuntos/1729. Acesso em: 14 set. 2023.

SULZBACH, Daisy. **Mapa Mental – Conjuntos Numéricos.** Passei Direto, 2022. Disponível em: https://www.passeidireto.com/arquivo/110309171/mapa-mental-conjuntos-numericos. Acesso em: 14 set. 2023.

ECCHER, Jaceli. **Conjuntos numéricos: veja o que são, classificação e exercícios**. Blog do Enem, 2022. Disponível em: https://blogdoenem.com.br/conjuntos-numericos/. Acesso em: 14 set. 2023.

5.3 MATERIAL UTILIZADO

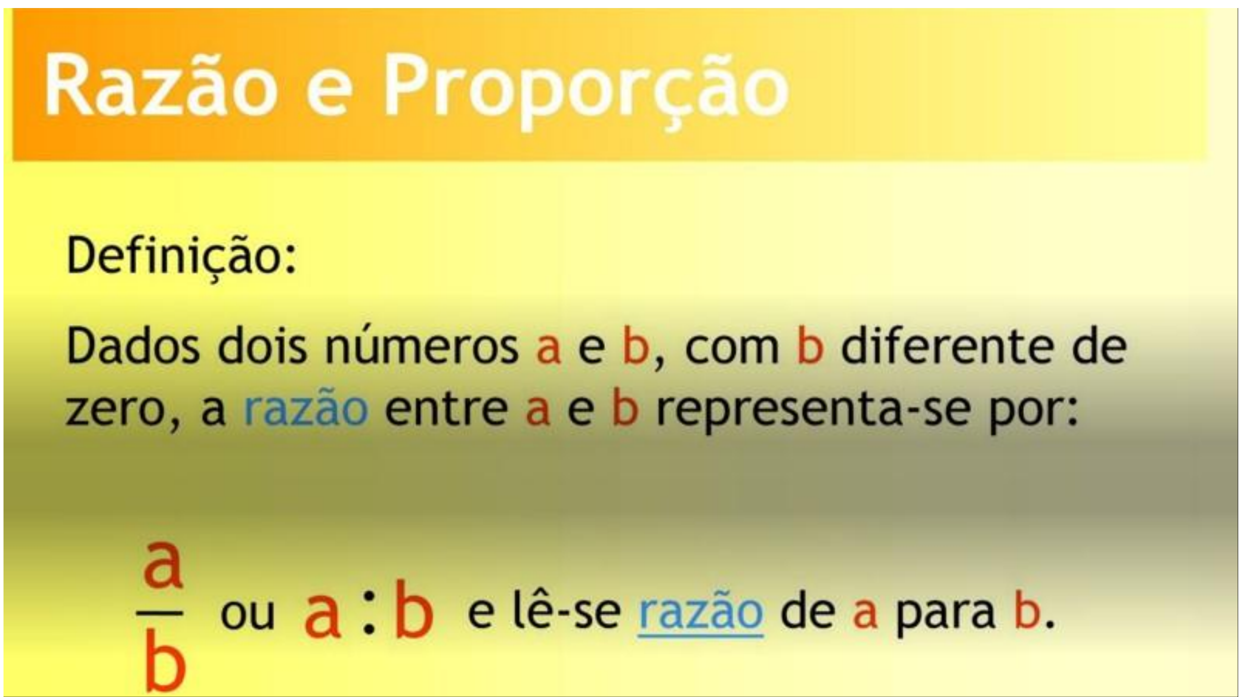
Problema 1. Sabrina gosta de correr todos os dias por uma pista de 900m. Em um dia ela correu 2/3 do total da pista e fez uma pausa, depois caminhou mais 7/6 antes de uma segunda pausa. Qual a fração que corresponde a distância que ela correu até a segunda pausa?

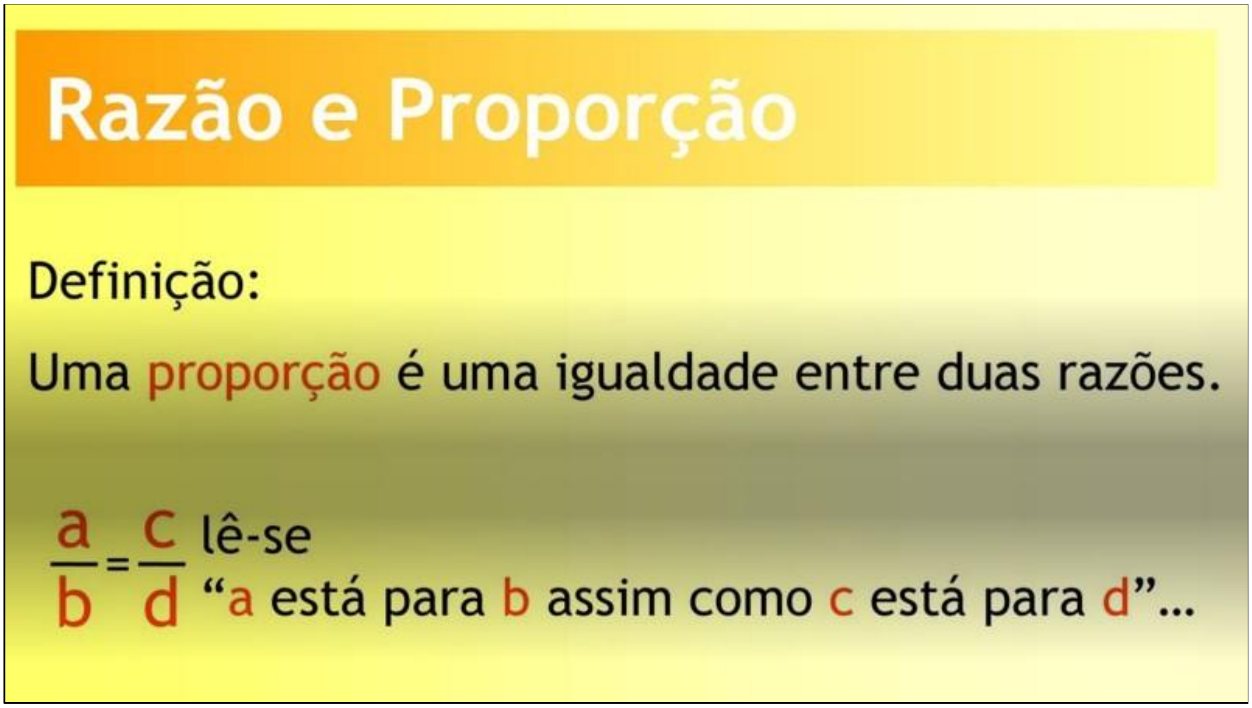
Resolução: Devemos somar as distâncias dos dois períodos em que Sabrina correu, ou seja,

$$\frac{2}{3}+\frac{7}{6}=\frac{2\times 2}{3\times 2}+\frac{7}{6}=\frac{4}{6}+\frac{7}{6}=\frac{11}{6}$$

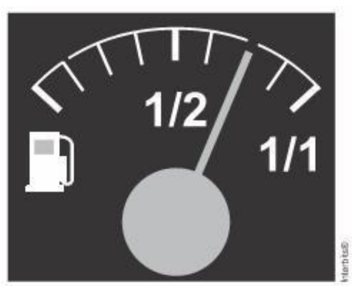
Resposta: Sabrina correu $11/6$ da pista.


RAZÃO
E
PROPORÇÃO


Razão e Proporção
Definição:
Dados dois números a e b, com b diferente de zero, a razão entre a e b representa-se por:
a/b ou a : b e lê-se razão de a para b.



- **Problema.** (Enem 2016 adaptada) No tanque de um certo carro de passeio cabem até 50L de combustível, e o rendimento médio deste carro na estrada é de 15 km/L de combustível. Ao sair para uma viagem de 600 km, o motorista observou que o marcador de combustível estava exatamente sobre uma das marcas da escala divisória do medidor, conforme figura a seguir.

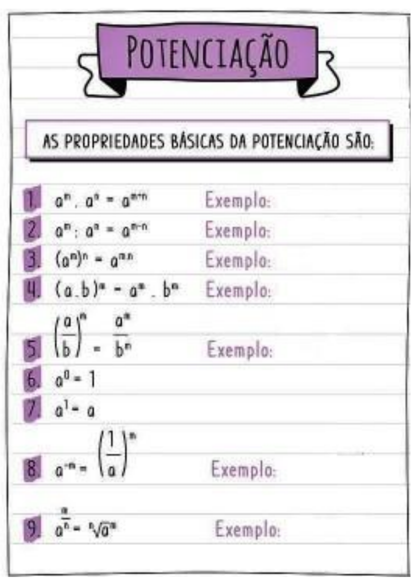


Como o motorista conhece o percurso, sabe que existem, até a chegada a seu destino, cinco postos de abastecimento de combustível, localizados a 150 km, 187 km, 450 km, 500 km e 570 km do ponto de partida.

Qual a máxima distância, em quilômetro, que poderá percorrer até ser necessário reabastecer o veículo, de modo a não ficar sem combustível na estrada?

Problema 2. Um casal está reformando a cozinha de casa e decidiu comprar um refrigerador novo. Observando a planta da nova cozinha, desenhada na escala de 1: 50, notaram que o espaço destinado ao refrigerador tinha 3,8cm de altura e 1,6 cm de largura. Eles sabem que os fabricantes de refrigeradores indicam que, para um bom funcionamento e fácil manejo na limpeza, esses eletrodomésticos devem ser colocados em espaços que permitam uma distância de, pelo menos 10cm de outros móveis e paredes, tanto na parte superior quanto nas laterais. O casal comprou o refrigerador que caberia no local a ele destinado na nova cozinha, seguindo as instruções do fabricante.
Esse refrigerador tem altura e largura máximas, em metro e respectivamente, iguais a

a) 1,8 e 0,6
b) 1,8 e 0,7
c) 1,9 e 0,8
d) 2 e 0,9
e) 2 e 1



1) Reduza a uma só potência:

a) $7 \times 7^4 =$

b) $3^0 \times 3^0 =$

c) $4^3 \times 4 \times 4^2 =$

d) $7^0 : 7^0 =$

e) $8^4 : 8^0 =$

f) $5^9 : 5^3 =$

g) $(4^3)^2 =$

h) $(a^3)^0 =$

i) $(2^7)^3 =$

2) Calcule o valor das expressões:

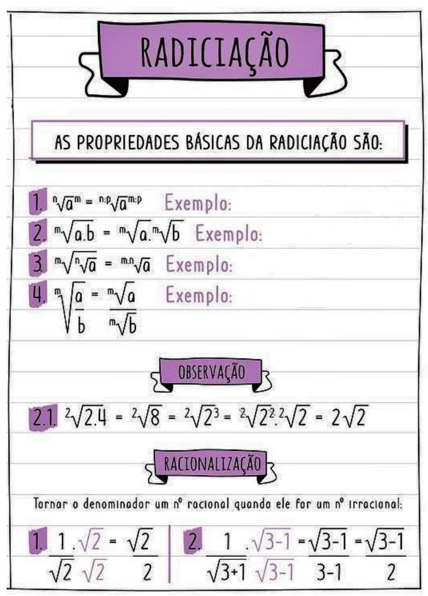
a) $70^0 + 0^{70} - 1 =$

b) $3^4 - 2^4 : 8 - 3 \times 4$

c) $(3 + 1)^2 + 2 \times 5 - 10^0$

d) $(7 + 4) \times (3^2 - 2^3) =$

e) $3^2 : (4 - 1) + 3 \times 2^2 =$



3) Reduza a uma só raiz:

a) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{12} =$

b) $\sqrt{16} \times \sqrt{5} \times \sqrt{8}$

c) $\sqrt{\sqrt[4]{24}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{32}}$

e) $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{5}}$

f) $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}}$

3) Calcule o valor das raízes:

a) $\sqrt{4 \times 9}$

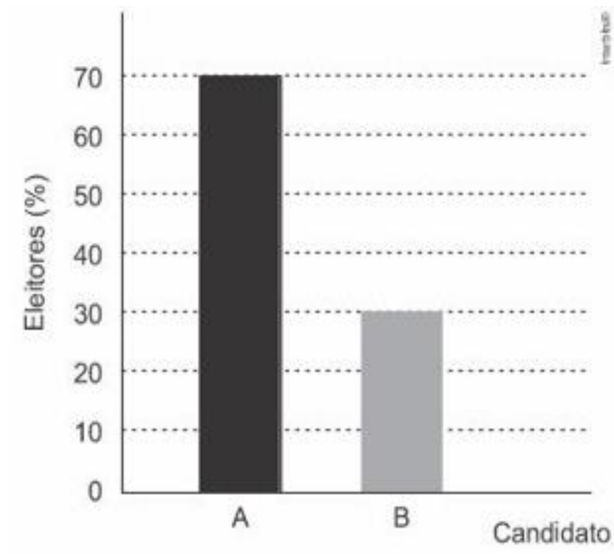
b) $\sqrt{\sqrt{81}}$

c) $\sqrt{\frac{16}{9}}$

Lista de dever de casa 2: radiciação e potenciação

1) (Enem 2017) O resultado de uma pesquisa eleitoral, sobre a preferência dos eleitores em relação a dois candidatos, foi representado por meio do Gráfico 1.

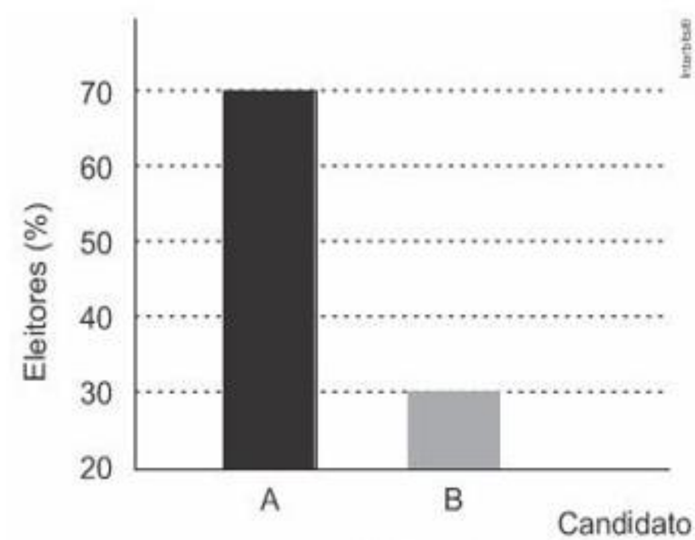
Gráfico 1: Resultado de preferência eleitoral



Fonte: INEP

Ao ser divulgado esse resultado em jornal, o Gráfico 1 foi cortado durante a diagramação, como mostra o Gráfico 2.

Gráfico 2: Resultado de preferência eleitoral usando escala distinta



Fonte: INEP

Apesar de os valores apresentados estarem corretos e a largura das colunas ser a mesma, muitos leitores criticaram o formato do Gráfico 2 impresso no jornal, alegando que houve prejuízo visual para o candidato B.

A diferença entre as razões da altura da coluna B pela coluna A nos gráficos 1 e 2 é:

$A)0$

$B)\frac{1}{2}$

$C)\frac{1}{5}$

$D)\frac{2}{15}$

$E)\frac{8}{35}$

2) **(**IFSC 2018) Analise as afirmações seguintes:

I. −52 − √16 · (−10) ÷ (√5)2 = −17
II. 35 ÷ (3 + √81 −23 + 1) × 2 = 10
III. Efetuando-se (3 + √5)(3 − √5) , obtém-se um número múltiplo de 2.
Assinale a alternativa CORRETA.

a) Todas são verdadeiras.
b) Apenas I e III são verdadeiras.
c) Todas são falsas.
d) Apenas uma das afirmações é verdadeira.
e) Apenas II e III são verdadeiras.

3) (ENEM 2019) O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é uma medida usada para classificar os países pelo seu grau de desenvolvimento. Para seu cálculo, são levados em consideração a expectativa de vida ao nascer, tempo de escolaridade e renda per capita, entre outros. O menor valor deste índice é zero e o maior é um. Cinco países foram avaliados e obtiveram os seguintes índices de desenvolvimento humano: o primeiro país recebeu um valor X, o segundo $\sqrt{X}$, o terceiro $X^{\frac{1}{3}}$, o quarto X^2 e o último X^3. Nenhum desses países zerou ou atingiu o índice máximo. Qual desses países obteve o maior IDH?

4) Considere as seguintes expressões:

I. $\frac{3\sqrt{12}}{2} = 3\sqrt{2}$

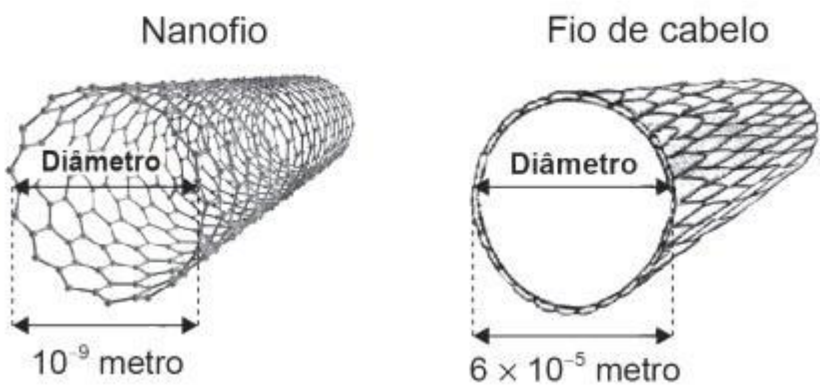
II. $(2\sqrt{3})^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

III. $(2^4)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$

Qual, ou quais são verdadeiras? Em relação a, ou às falsas, anuncie um dos lados da igualdade de maneira a formar uma sentença verdadeira.

5) **(Enem 2021**) O nanofio é um feixe de metais semicondutores usualmente utilizado na fabricação de fibra óptica. A imagem ilustra, sem escala, as representações das medidas dos diâmetros de um nanofio e de um fio de cabelo, possibilitando comparar suas espessuras e constatar o avanço das novas tecnologias.

Figura 12: comparação entre um nanofio e um fio de cabelo



Fonte: INEP

O número que expressa a razão existente entre o comprimento do diâmetro de um fio de cabelo e o de um nanofio é:

a. 6×10^{-14}

b. $6 \times 10^{-\frac{5}{9}}$

c. $6 \times 10^{\frac{5}{9}}$

d. 6×10^{4}

e. 6×10^{45}

6) **(Enem 2020)** Muitos modelos atuais de veículos possuem computador de bordo. Os computadores informam em uma tela diversas variações de grandezas associadas ao desempenho do carro, dentre elas o consumo médio de combustível. Um veículo, de um determinado modelo, pode vir munido de um dos dois tipos de computadores de bordo:

Tipo A: informa a quantidade X de litro de combustível gasto para percorrer 100 quilômetros

Tipo B: informa a quantidade de quilômetro que o veículo é capaz de percorrer com um litro de combustível.
Um veículo utiliza o computador do Tipo A, e ao final de uma viagem o condutor viu apresentada na tela a informação “$\frac{X}{100}$”.
Caso o seu veículo utilizasse o computador do Tipo B, o valor informado na tela seria obtido pela operação

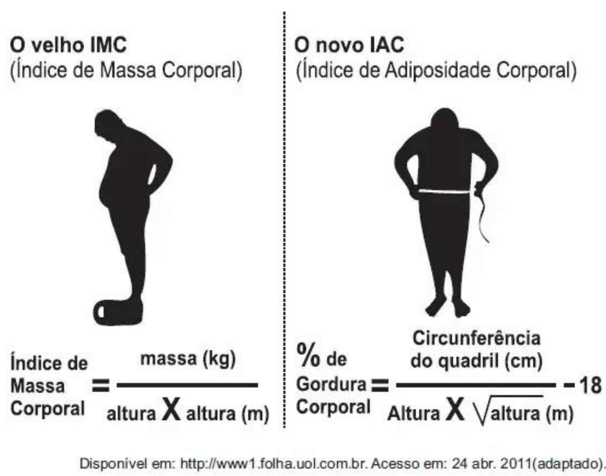
a) $X \times 100$
b) $\frac{X}{100}$-
c) $\frac{100}{X}$
d) $\frac{1}{X}$
e) $\mathbf{1} \times \boldsymbol{X}$

7) (CEFET/RJ – 2014 – Adaptada) por qual número devemos multiplicar o número 0,75 de modo que a raiz quadrada do produto obtido seja igual a 45?

8) **(Enem 2015 - Adaptada)** As exportações de soja do Brasil totalizaram 4,129 milhões de toneladas no mês de julho de 2012, e registraram um aumento em relação ao mês de julho de 2011, embora tenha havido uma baixa em relação ao mês de maio de 2012. A quantidade, em quilogramas, de soja exportada pelo Brasil no mês de julho de 2012 foi de:

9) **(Enem 2010 - Adaptada)** Embora o Índice de Massa Corporal (IMC) seja amplamente utilizado, existem ainda inúmeras restrições teóricas ao uso e às faixas de normalidade preconizadas. O Recíproco do Índice Ponderal (RIP), de acordo com o modelo alométrico, possui uma melhor fundamentação matemática, já que a massa é uma variável de dimensões cúbicas e a altura, uma variável de dimensões lineares. As fórmulas que determinam esses índices são:

Figura 13: IMC e RIP



Fonte: INEP

Se uma menina, com 64 kg de massa, apresenta IMC igual a 25 kg/m2, então ela possui RIP igual a

10) **(Enem PPL 2013)** O matemático americano Eduardo Kasner pediu ao filho que desse um nome a um número muito grande, que consistia do algarismo 1 seguido de 100 zeros. Seu filho batizou o número de gugol. Mais tarde, o mesmo matemático criou um número que apelidou de gugolplex, que consistia em 10 elevado a um gugol.

    Quantos algarismos tem um gugolplex?

11) **(Unicamp 2021 - Adaptada)** Duas impressoras funcionando simultaneamente imprimem certa quantidade de páginas em 36 segundos. Sozinha, uma delas imprime a mesma quantidade de páginas em 90 segundos. Funcionando sozinha, para imprimir a mesma quantidade de páginas, a outra impressora gastaria:

5.4 RELATÓRIO DO ENCONTRO II

No sábado, 23 de setembro de 2023, às 8 horas da manhã, ocorreu o segundo encontro do PROMAT (Programa de Matemática) na Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE. Este encontro teve como foco o ensino de potenciação, radiciação e razão e proporção. O encontro foi ministrado pelos estagiários Luiza Stunder, Márcio Miranda, Raianny Zerneh e Theo da Luz, com a participação de 19 alunos em sala foi necessário adaptar as atividades para atender a necessidade de um aluno autista de modo a permitir que ele participasse da aula.

No início do encontro, foi revisado a resolução da primeira situação-problema apresentada na aula anterior e oferecemos a oportunidade para que os alunos esclarecessem suas dúvidas.

Em seguida, os alunos foram organizados em trios para realização da atividade triminó. A atividade foi produtiva, com os alunos se engajando na resolução utilizando os conceitos previamente apresentados, especificamente sobre soma de frações. Durante essa dinâmica, os alunos receberam auxílio constante e quando necessário foram orientados de maneira a melhorar o desempenho no jogo.

Neste encontro, um aluno autista se fez presente, o que gerou surpresa, uma vez que ele não compareceu a aula anterior. Apesar de não haver sido comunicado sobre as particularidades e necessidade dos alunos, as atividades puderam ser bem adaptadas para sua participação. Durante a dinâmica, foi questionado se ele desejava realizá-la sozinho ou em grupo. Ele optou por fazê-la sozinho, assim entregamos um jogo avulso do triminó a ele. O espaço do aluno foi respeitado conforme a sua necessidade, recebendo auxílio apenas quando desejado e necessário. A experiência foi de grande aprendizado para todos os envolvidos

Após concluir a dinâmica, foi revisado a segunda situação-problema da última aula, que falava a respeito de sucos vendidos em uma cantina, atividade essa, que os alunos apresentaram dificuldades. O professor orientador Jean, presente em aula, auxiliou no processo de revisão da questão. Então, foi introduzido a definição de razão e proporção por meio de slides e aplicado os conceitos em duas situações-problema adaptadas do enem que foram entregues impressas para os alunos. Durante essa atividade, foi auxiliado os alunos conforme surgiam dúvidas. As questões foram resolvidas no quadro e foi incentivado os alunos a compartilharem suas próprias abordagens para que houvesse troca de conhecimento entre eles. Dois alunos em demonstraram interesse em partilhar suas resoluções.

Em seguida, foi abordado o assunto de potenciação e radiciação, utilizando mapas mentais, distribuídos aos alunos. Foi usado exemplos práticos e oferecido chocolates para os alunos que participassem das resoluções. Então, foram entregues exercícios impressos relacionados ao tema, para que os alunos pudessem aplicar os conceitos debatidos. Todas as dúvidas foram sanadas de forma individual. Alguns alunos demonstraram dificuldades em conectar as propriedades com os exercícios, enquanto outros resolveram intuitivamente, sem necessidade do mapa mental.

No geral, houve um maior engajamento dos alunos e a dinâmica de aula foi mais envolvente. Contudo, alguns alunos ainda enfrentaram dificuldades na compreensão dos conceitos apresentados. Essa experiência reforça a importância da adaptação das estratégias de ensino para atender às necessidades de todos os alunos e enfatiza a colaboração entre os estagiários e os orientadores. Esses aprendizados serviram para, nas próximas aulas, essas dificuldades possam ser abordadas de forma mais eficaz para promover um melhor aprendizado de todos os alunos.

6. ENCONTRO III

6.1 PLANO DE AULA - ENCONTRO III

Público-alvo: Alunos de todos os anos do Ensino Médio da rede pública estadual do Paraná.

Estagiários: Luiza Stunder, Márcio Vinícius Rocha Miranda, Raianny Vitória Zerneh, Theo Fernando Bonfim da Luz

Conteúdos: Equações e sistemas de primeiro grau

Objetivo geral: Revisar os conceitos listados acima e utilizá-los para resolver questões.

Objetivos específicos:

- Reconhecer equações de primeiro grau e levá-las à forma "$ax + b = c$," onde "a," "b" e "c" são números reais;
- Resolver equações de primeiro grau;
- Aplicar propriedades da igualdade (adição, subtração, multiplicação e divisão) ao resolver equações de primeiro grau;
- Interpretar e traduzir problemas do mundo real em equações de primeiro grau e resolvê-los para encontrar soluções que refletem de forma prática no problema modelado;
- Interpretar a solução de sistemas de equações, identificando se ele possui uma única solução, nenhuma solução ou infinitas soluções.

Tempo de execução: 3h e 20 minutos.

Recursos didáticos: Quadro, giz, atividades impressas, lápis, borracha, caderno.

Encaminhamento Metodológico:

Atividade racionalizei:

A aula será iniciada com o jogo Racionalizei, para que os alunos possam relembrar os conteúdos da aula anterior, e para que se possa avaliar o seu desenvolvimento. As regras da dinâmica estão listadas no plano de aula anterior.

Figura 15: Racionalizei!

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{4}$	3^2	$\sqrt{81}$	$\frac{3}{\sqrt{4}}$
$\frac{3}{2}$	2^4	4^2	$3^3 + 3^2$	3^5
0^0	1	$0^0 + \sqrt{4}$	$\frac{6}{2}$	$\sqrt{64}$
2^3	$\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$\frac{4}{9}$	$4^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{4}$
$\sqrt{9 \times 4}$	6	$\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$	$\frac{3}{2}$	7^1
$\sqrt{49}$	$5^6 \div 5^4$	25	$(6^2)^3$	6^6
$(3 \times 2)^5$	$3^5 + 2^5$	3^{-2}	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\sqrt{\sqrt[3]{5}}$
$\sqrt[9]{8^3}$	2	$\sqrt{9 \times 7}$	$\sqrt{9} \times \sqrt{7}$	$\sqrt[6]{5}$

Fonte: RELATÓRIO FINAL PROMAT 2022. GABRIELLA;NEVIR;THAIS;RICARDO

Retomaremos com a correção da lista entregue como atividade complementar na aula anterior, pedindo que os alunos exponham suas dúvidas ou se tiveram algum raciocínio diferente para resolver os exercícios.

(15 minutos)

Introdução a equação de 1º grau e sistemas

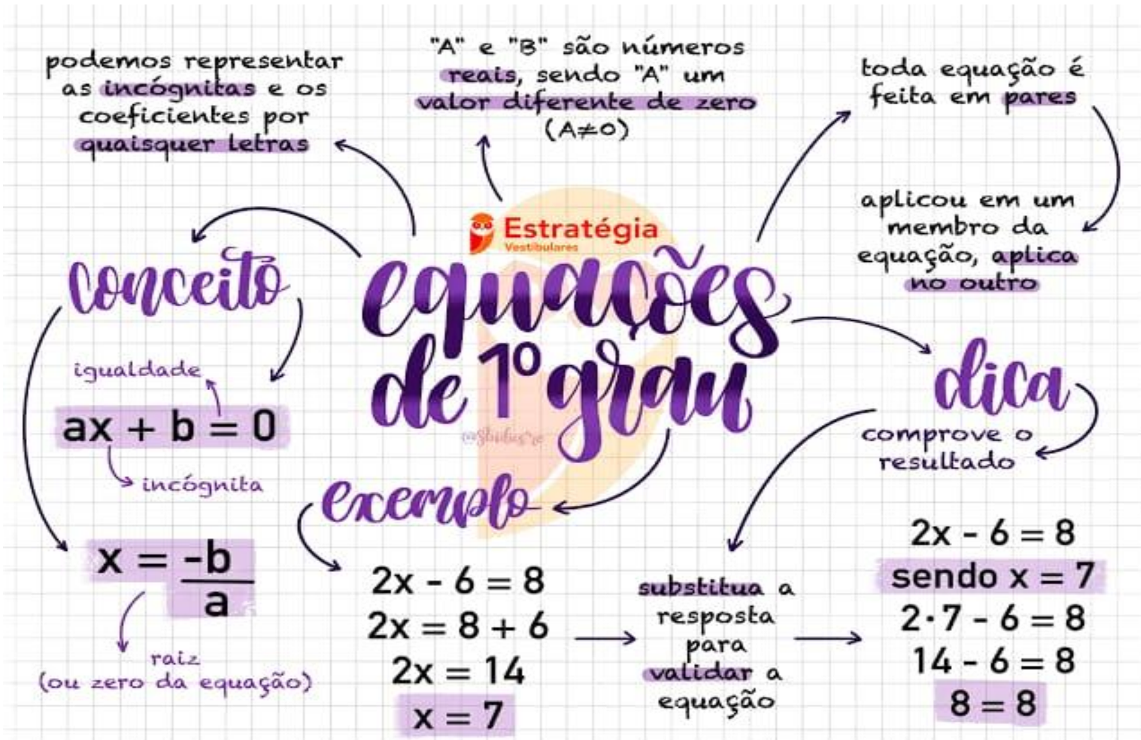
Distribuiremos cartões com equações aos alunos e solicitaremos para que permaneçam em grupo. O objetivo será que eles resolvam todos os cartões de atividades do grupo.

Durante a atividades os professores tirarão dúvidas e após o seu termino será feita a formalização desses conceitos juntamente com um mapa mental

Mapa mental equação de 1º grau:

Em seguida será relembrado a definição da equação de 1º grau por meio de um mapa mental, que será distribuído e projetado para maior visualização.

Figura 15: Mapa mental de equações do primeiro grau

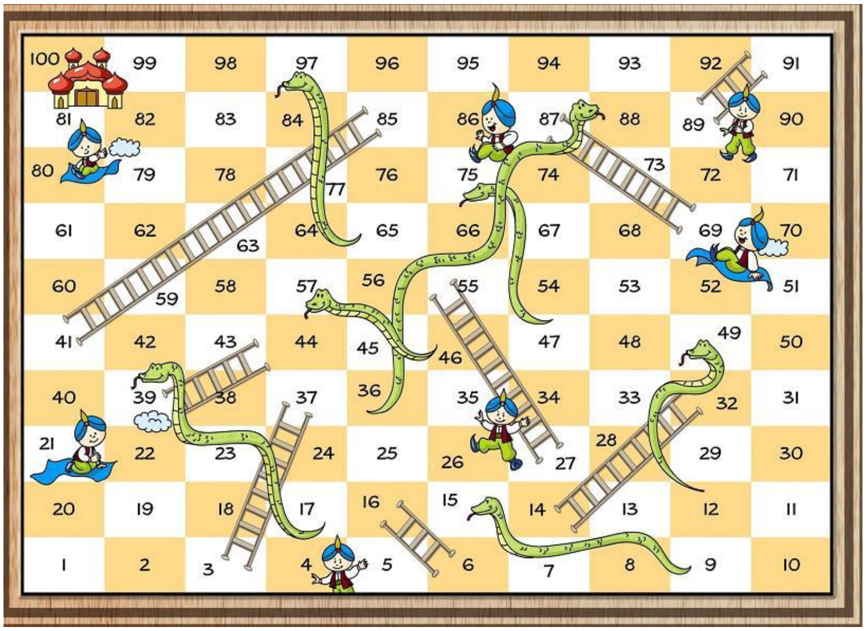


Fonte: Maps 4 study

Na sequência, apresentaremos o jogo das escadas e serpentes aos alunos. O jogo é o que segue:

Após dividir a turma em duplas (ou equipes, à critério do professor da turma), cada duas duplas ou duas equipes receberão um tabuleiro, as cartas, que ficarão empilhadas ao lado com seus versos voltados para cima, dados e peões, que serão posicionados na casa de número 1. Ao determinar quem iniciará jogando, a dupla/equipe pega uma carta da pilha, lê o desafio em voz alta e tenta resolver. Depois de resolver, buscam o cartão resposta com o número da atividade do cartão e comparam as respostas; se acertarem devem rolar os dados e avançar o número de casas determinado por eles. Se errarem, permanecem na casa atual e será a vez dos adversários, que repetirão as ações.

Figura 16: Tabuleiro do jogo das escadas e serpentes



Fonte: https://ensfundamental1.files.wordpress.com/2010/06/serpentes-e-escadas.jpg

Caso uma dupla/equipe pare em uma casa em que está desenhada a base de uma escada, eles poderão avançar para a casa onde está o topo dessa escada. A regra não se aplica para quando pararem na casa onde está desenhada o topo da escada. Se pararem em uma casa que possui a cabeça de uma serpente desenhada, deverão retornar a casa onde está desenhada a cauda de uma cobra. A regra não se aplica para quando pararem em uma casa onde está desenhada a cauda de uma cobra

Se uma dupla/equipe parar em uma casa onde está desenhado alguma parte do gênio, caso os adversários em sua vez acertarem o desafio eles poderão avançar o número de casas determinado pelo dado com menor número rolado pelos adversários (por exemplo, os adversários acertaram o desafio, rolaram os dados e obtiveram um 5 e um 3, a dupla que está na casa com o gênio avançará 3 casas).

Ganha o jogo a equipe/dupla/aluno que alcançar a casa de número 100 primeiro.

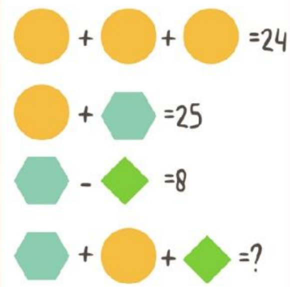
Os cartões do jogo estão a seguir:

$$5x-10=x+\frac{1}{2}$$

97

$$\frac{x}{5}+\frac{x}{2}=\frac{7}{10}$$

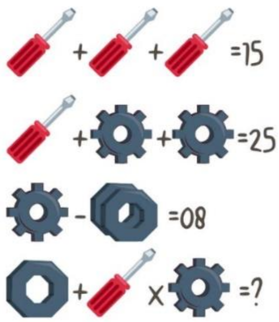
98



99

$$-2^4-7x=-4x-2^2$$

100



91

Pedro tinha x reais. Gastou um terço no parque de diversões. No outro dia, gastou 10 reais com figurinhas. Depois saiu para lanchar com seus colegas na escola gastando mais $\frac{4}{5}$ do que ainda tinha e ficou ainda com um troco de 12 reais. Qual o valor de x em reais?

92

Após ter corrido $\frac{2}{7}$ de um percurso e, em seguida, caminhando $\frac{5}{11}$ do mesmo percurso um atleta verificou que ainda faltavam 600 metros para o final do percurso. Qual o comprimento total do percurso?

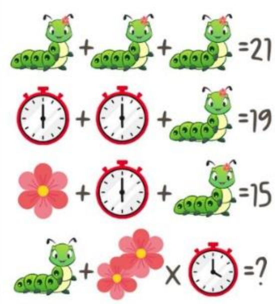
93

Uma peça de tecido, após a lavagem, perdeu $\frac{1}{10}$ de seu comprimento e este ficou medindo 36 metros. Qual era o comprimento da peça antes de ser lavada?

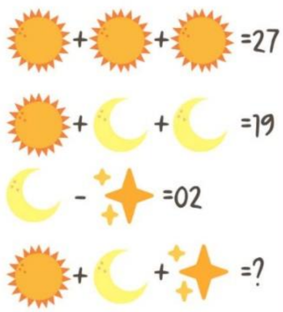
94

Sabe-se que $\frac{3}{5}$ da idade de Jurandir menos 15 é igual a 9. Qual é a idade de Jurandir?

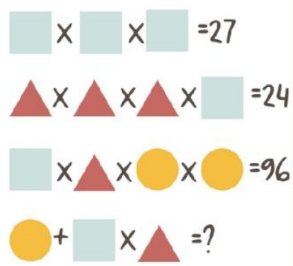
95



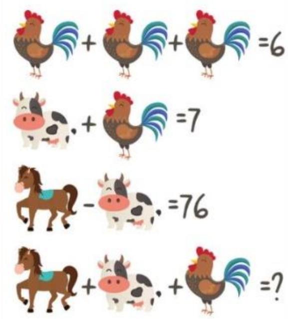
96



82

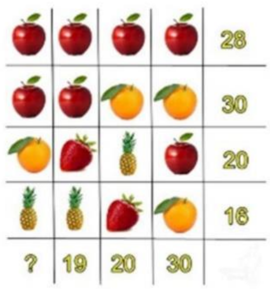


83

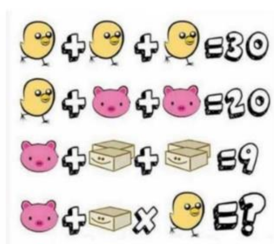


84

Calcule



85

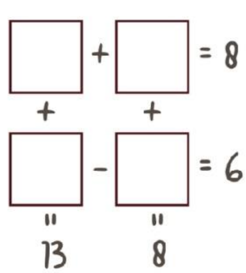


86

Tenho o quádruplo da idade que você tem. Daqui a 4 anos terei o triplo da sua idade. Quais são as nossas idades?

87

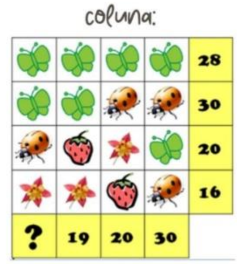
Monte as equações e calcule:



88

89

Calcule o valor de cada figura e o valor da primeira coluna:

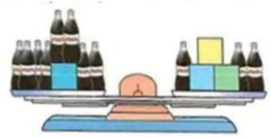


90

Qual é o peso de cada lata da imagem?

73

e cada caixa pesa 2 kg, quanto pesa cada garrafa?



74

Represente a imagem em forma de equação algébrica e informe o valor de x

75

Descubra o valor de x

76

Monte a equação e calcule o valor de m:

77

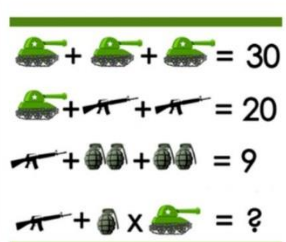
Quadrado mágico é uma tabela onde a soma das linhas, das colunas e das diagonais é igual. Determine o valor de x:

8	x − 1	x
x − 3	5	x + 5
x + 2	x + 3	x − 2

78

Monte a equação e calcule o valor de cada bolinha:

79



80

Quando meu pai tinha 31 anos, eu tinha 8. Agora ele tem o dobro da minha idade. Quantos anos eu tenho?

81

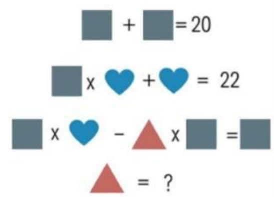
Descubra o valor dos animaizinhos e da diagonal:

64

Descubra o valor dos animaizinhos e da diagonal:

65

Qual é o valor do triângulo



66

Em virtude da interdição de uma ponte, os motoristas que transitavam por um trecho de estrada tiveram que percorrer um desvio com 52 km. Se esse desvio era 8 km maior que o dobro do comprimento do trecho interditado, qual o comprimento do trecho original da estrada?

67

O perímetro de um retângulo é 92cm. Quais são suas medidas considerando que o comprimento tem 8cm a mais que a altura?

68

O dobro de um número adicionado à sua terça parte, é igual ao número somado com 20. Qual é esse número?

69

Encontre três números pares consecutivos cuja soma dê 828

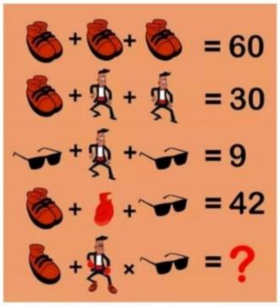
70

Quando nasci, minha mãe tinha 12 cm a mais que o triplo de minha altura. Se minha mãe tem 1,68 m, como àquela época, com que altura eu nasci?

71

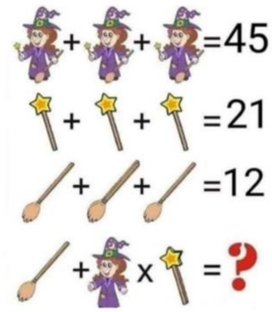
Qual é o valor de x?

72



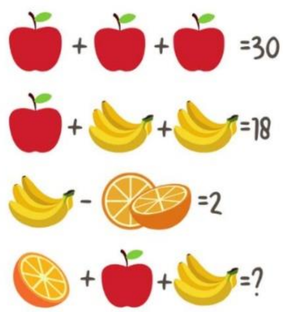
55

56



57

58

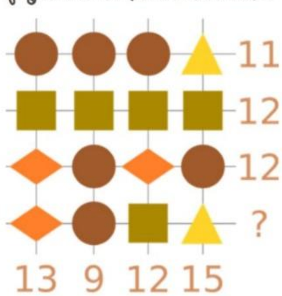


59

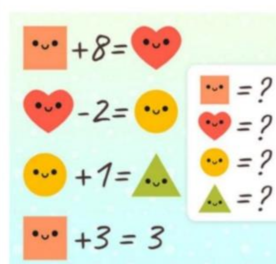
60

61

Descubra o valor de cada figura e da linha de baixo:



62



63

$7(x-2)=5(x+3)$

46

$3x=x+1+7$

47

$3(x-2)=2x-4$

48

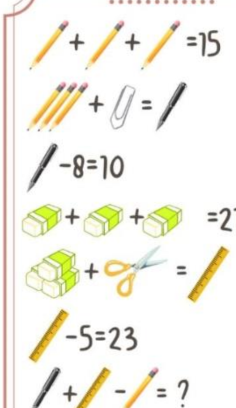
$-3x+10=2x+8+1$

49

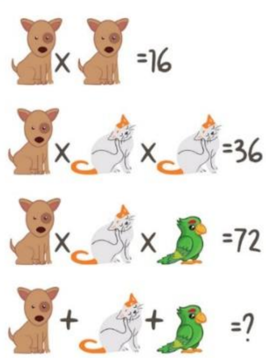
$-2^3-x=10$

50

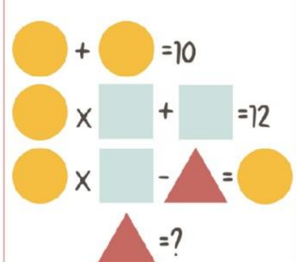
51



52



53



54

O dobro de um número, diminuído de 4, é igual ao mesmo número somado de 1. Qual é o número?

37

Em uma fábrica um terço dos empregados é estrangeiros e 72 são brasileiros. Quantas pessoas trabalham nessa fábrica?

38

Márcia tem quatro vezes a idade de sua filha, Solange. Daqui a 20 anos, Márcia terá o dobro da idade de Solange. Quantos anos elas têm hoje?

39

Em apenas 2 anos terei o dobro da idade que tinha há 5 anos. Quantos anos eu tenho?

40

Num sítio existem 21 animais, entre patos e gatos. Sendo 54 o total de pés desses animais, calcule a diferença entre o número de patos e gatos

41

A soma de três números consecutivos é igual a 21. O dobro do menor número somado com o quadrado do maior número é:

a. 28

b. 54

c. 56

42

O triplo de um número mais dois é igual ao mesmo número mais oito. Qual é o número?

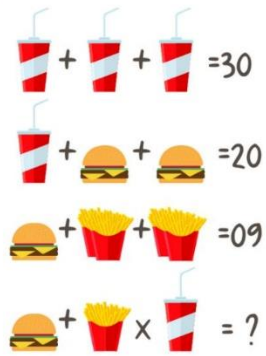
43

$-3 = x + 10$

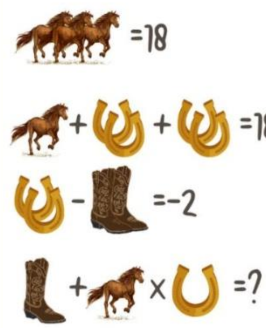
44

$x + 2x + 3 - 5 = 4x - 9$

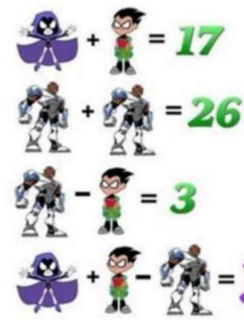
45



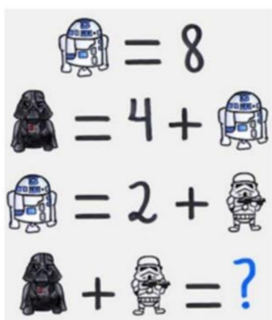
28



29



30



31

O preço de uma corrida de táxi inclui um valor fixo, chamado de bandeirada, e uma parcela variável, que é função da distância percorrida. Se o preço da bandeirada é R$4,60 e o km rodado é R$0,96, qual a distância percorrida por um passageiro que pagou R$19,00?

32

A soma de três números inteiros consecutivos é 30. Qual é o produto entre esses três números?

33

Um terreno retangular possui o comprimento cinco vezes maior que a largura. Sabendo que o perímetro desse terreno é igual a 180 metros, quanto medem a largura e o comprimento, respectivamente?

34

A soma de um número com seu quíntuplo é igual ao dobro desse mesmo número somado com 40. Que número é esse?

35

Peça para um colega da equipe/dupla adversária montar uma equação para você e sua equipe/dupla resolverem

36

No jogo Minecraft, para construir uma picareta de pedra são necessários três blocos de pedra e dois gravetos, quantos blocos de pedra e gravetos são necessários para construir 6 picaretas?

19

Pensei em um número, multipliquei por 5, subtraí 12 e obtive o dobro do número que pensei. Que número pensei inicialmente?

20

O que é uma incógnita?

21

Somando as idades de Ana e de Beatriz, obtemos 15 anos. Calcule as duas idades, sabendo que o dobro da idade de Ana é igual ao quádruplo da idade de Beatriz.

22

Ana e Alexandre tem juntos 30 reais, Ana tem 6 reais a menos que Alexandre. Qual expressão representa a situação descrita:

a. $x=x-30$
b. $x=x-6$
c. $30=x+x-6$
d. $x+(x-6)=30$

Quantos reais Ana tem?

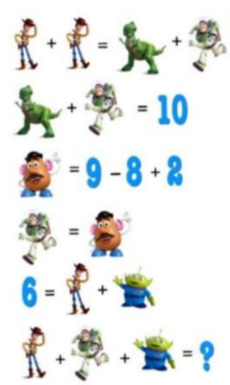
23

Três irmãos herdaram 81 barras de ouro. O irmão do meio recebeu o dobro de barras que o irmão mais novo e o mais velho recebeu o triplo que o do meio. Quantas barras de ouro recebeu cada irmão?

24

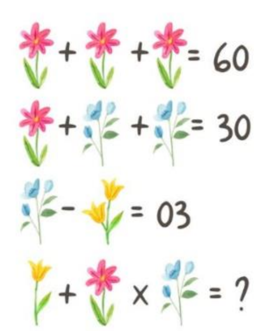
Cite três situações do dia a dia em que podem ser usadas equações (fora as aulas de matemática)

25



26

Qual é a resposta?



27

Resolva a equação:

$\frac{5x}{2} = 2x + \frac{x-2}{3}$

10

A terça parte da idade de Zeca diminuída de 4 anos é 9.
Qual é a idade de Zeca?

11

Represente o problema utilizando equações e resolva: Em um determinado dia, a temperatura no Ártico chegou à -42°C. Essa temperatura correspondeu à $\frac{3}{4}$ da temperatura da Groelândia. Qual a temperatura média da Groelândia nesse dia?

12

Peça à um colega da equipe/dupla adversária para escrever na palma da mão um número até 99, depois dobrar esse número, somar 12 e dividir por $\frac{1}{2}$ e dizer o resultado. Agora resolva e revele o número pensado inicialmente

13

Em um concurso os participantes devem responder um total de 20 questões. Para cada resposta correta o candidato ganha 3 pontos e para cada resposta errada perde 2 pontos. Quantos acertos e erros teve um candidato que obteve o total de 35 pontos?

14

Que número sou eu? O dobro do meu antecessor, menos 3 é 25.

15

O número 0 é solução da equação $2x+3=\frac{6}{2}$?

16

Para construir uma espada de pedra no jogo Minecraft são necessários dois blocos de pedra e um graveto, quantos blocos de pedra e gravetos são necessários para construir?

17

Determine um número para que as equações $5x+6$ e $2x+9$ sejam iguais

18

Monte uma situação problema envolvendo equações (diferente de qualquer uma usada em aula até agora)

01

Qual é o formato que toda equação segue:

a. $ab+x=1$

b. $ax=0$

c. $ax+b=0$

02

O dobro de um número subtraído de 20 é igual a 100.
Qual é o número?

03

Qual das expressões a seguir é uma equação e por quê?

a. $3x-\frac{1}{7}>2$

b. $2x+4=0$

c. $3+7$

04

Monte a expressão algébrica e resolva a equação: A metade de um número mais 5 é igual ao triplo desse número menos 10

05

Verifique se 1 é a raiz da equação
$4x+\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

06

O que é uma equação de 2° grau?

07

Dada a equação
$7x-3+x=5-2x$,
qual é o segundo termo?

08

Simplifique e resolva a seguinte equação:
$3(x-2)=2x-4$

09

Após os alunos terminarem a atividade acima, entregaremos a lista de dever de casa 3. Daremos 30 minutos para que eles resolvam questões escolhidas por nós e posteriormente, apresentaremos no quadro as soluções para os problemas que mais geraram dúvidas.

6.2 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Equação do 1° Grau. Maps4study. Disponível em: https://maps4study.com.br/enem/equacoes-do-1o-grau/. Acesso em: 27 set. 2023.

GOUVEIA, Rosimar. **Sistemas de Equações do 1º Grau – Exercícios.** Toda Matéria. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/sistemas-de-equacoes-do-1-grau-exercicios/. Acesso em: 27 set. 2023.

Sistema de Equações. Projeto Agatha. Disponível em: https://www.projetoagathaedu.com.br/questoes-enem/matematica/sistema-de-equacoes.php. Acesso em: 27 set. 2023.

Exercícios Sobre Sistema De Equação. Mundo Educação. Disponível em: https://exercicios.mundoeducacao.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-sistema-equacao.htm. Acesso em: 27 set. 2023.

Os 8 Melhores Exercícios De Sistemas De Equações Com Gabarito. Beduka, 2020. Disponível em: https://beduka.com/blog/exercicios/matematica-exercicios/exercicios-de-sistemas-de-equacoes/. Acesso em: 27 set. 2023.

Enem 2013 - Equação do 1° grau - Questão 164 - Exercício 29. Calcule Mais. Disponível em: https://calculemais.com.br/exercicios-de-matematica/574/enem-enem_2013_prova_amarela-exercicio_29. Disponível em: 27 set. 2023.

6.3 MATERIAL UTILIZADO

Lista de dever de casa 3: equações e sistema de equações de primeiro grau

1) (ENEM 2009) Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$ 7,00.

De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?

a) R$ 14,00
b) R$ 17,00
c) R$ 22,00
d) R$ 32,00
e) R$ 57,00

2) (ENEM 2010) O Salto Triplo é uma modalidade do atletismo em que o atleta dá um salto em um só pé, uma passada e um salto, nessa ordem. Sendo que o salto com impulsão em um só pé será feito de modo que o atleta caia primeiro sobre o mesmo pé que deu a impulsão; na passada ele cairá com o outro pé, do qual o salto é realizado.

Um atleta da modalidade Salto Triplo, depois de estudar seus movimentos, percebeu que, do segundo para o primeiro salto, o alcance diminuía em 1,2 m, e, do terceiro para o segundo salto, o alcance diminuía 1,5 m. Querendo atingir a meta de 17,4 m nessa prova e considerando os seus estudos, a distância alcançada no primeiro salto teria de estar entre:

a) 4,0 m e 5,0 m
b) 5,0 m e 6,0 m
c) 6,0 m e 7,0 m
d) 7,0 m e 8,0 m
e) 8,0 m e 9,0 m

3) (ENEM 2010) Desde 2005, o Banco Central não fabrica mais a nota de R$ 1,00 e, desde então, só produz dinheiro nesse valor em moedas. Apesar de ser mais caro produzir uma moeda, a durabilidade do metal é 30 vezes maior que a do papel. Fabricar uma moeda de R$ 1,00 custa R$ 0,26, enquanto uma nota custa R$ 0,17, entretanto, a cédula dura de oito a onze meses.

Com R$ 1 000,00 destinados a fabricar moedas, o Banco Central conseguiria fabricar, aproximadamente, quantas cédulas a mais?

a) 1.667
b) 2.036
c) 3.846
d) 4.300
e) 5.882

4) (VUNESP-99) Um clube promoveu um show de música popular brasileira ao qual compareceram 200 pessoas entre sócios e não sócios. No total, o valor arrecadado foi de R$ 1 400,00 e todas as pessoas pagaram ingresso. Sabendo-se que o preço do ingresso foi de R$ 10,00 e que cada sócio pagou metade desse valor, o número de sócios presentes foi:

a) 80
b) 100
c) 120
d) 140
e) 160

5) (UEG GO – 2017) Um professor fará uma avaliação cuja nota será composta por 20% da nota de um trabalho escrito, 30% da nota de uma apresentação oral e o restante por uma prova sobre um tema a ser sorteado. Se o aluno obtiver nota 9 no trabalho escrito, 8 na apresentação oral, para que ele tenha nota 7 nessa avaliação ele terá que tirar nessa prova uma nota igual a:

a) 4,0
b) 5,4
c) 5,6
d) 1,4

e) 7,0

6) Uma empresa A cobra R$ 80,00 por um determinado produto, mais uma taxa mensal de R$ 20,00 para manutenção. Uma empresa B cobra R$ 120,00 pelo mesmo produto, mais a taxa mensal de R$ 12,00 para manutenção.

A empresa B será mais vantajosa que a A:

a) A partir do 10º mês.
b) A partir do 4º mês.
c) A partir do 7º mês.
d) A partir do 5º mês.
e) Sempre.

7) Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a 2/3 do tempo em que a luz vermelha fique acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante X segundos e ciclo dura Y segundos.

Qual é a expressão que representa a relação entre X e Y?

a) $5X - 3Y + 15 = 0$
b) $5X - 2Y + 10 = 0$
c) $3X - 3Y + 15 = 0$
d) $3X - 2Y + 15 = 0$
e) $3X - 2Y + 10 = 0$

8) (ENEM Digital 2020) Para sua festa de 17 anos, o aniversariante convidará 132 pessoas. Ele convidará 26 mulheres a mais do que o número de homens. A empresa contratada para realizar a festa cobrará R$ 50,00 por convidado do sexo masculino e R$ 45,00 por convidado do sexo feminino.

Quanto esse aniversariante terá que pagar, em real, à empresa contratada, pela quantidade de homens convidados para sua festa?

a) 2.385,00
b) 2.650,00
c) 3.300,00
d) 3.950,00

e) 5.300,00

9) (ENEM 2018) Durante uma festa de colégio, um grupo de alunos organizou uma rifa. Oitenta alunos faltaram à festa e não participaram da rifa. Entre os que compareceram, alguns compraram três bilhetes, 45 compraram 2 bilhetes, e muitos compraram apenas um. O total de alunos que comprou um único bilhete era 20% do número total de bilhetes vendidos, e o total de bilhetes vendidos excedeu em 33 o número total de alunos do colégio.

Quantos alunos compraram somente um bilhete?

a) 34
b) 42
c) 47
d) 48
e) 79

10) (ENEM 2020) Em um país, as infrações de trânsito são classificadas de acordo com sua gravidade. Infrações dos tipos *leves* e *médias* acrescentam, respectivamente, 3 e 4 pontos na carteira de habilitação do infrator, além de multas a serem pagas. Um motorista cometeu 5 infrações de trânsito. Em consequência teve 17 pontos acrescentados em sua carteira de habilitação.

Qual é a razão entre o número de infrações do tipo *leve* e o número de infrações do tipo *média* cometidas por esse motorista?

a) $\frac{5}{17}$
b) $\frac{3}{4}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{3}{2}$
e) $\frac{7}{17}$

11) (ENEM 2018) Uma loja vende automóveis em N parcelas iguais sem juros. No momento de contratar o financiamento, caso o cliente queira aumentar o prazo, acrescentando mais 5 parcelas, o valor de cada uma das parcelas diminui R$ 200,00, ou se ele quiser diminuir o prazo, com 4 parcelas a menos, o valor de cada uma das parcelas sobe R$ 232,00. Considere ainda que, nas três possibilidades de pagamento, o valor do automóvel é o mesmo, todas são sem juros e não é dado desconto em nenhuma das situações.

Nessas condições, qual é a quantidade N de parcelas a serem pagas de acordo com a proposta inicial da loja?

a) 24
b) 58
c) 29
d) 40
e) 20

12)(UFRGS 2020) Para que o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ ax + 2y = 9 \end{cases}$$

Seja possível e determinado, é necessário e suficiente que:

a) a ≠ 2
b) a ≠ 1
c) a = 1
d) a = 2
e) a pode ser qualquer número

13)(Colégio Militar, RJ – 2014) Um trem viaja de uma cidade a outra sempre com velocidade constante. Quando a viagem é feita com 16 km/h a mais na velocidade, o tempo gasto diminui em duas horas e meia, e quando á feita com 5 km/h a menos na velocidade, o tempo gasto aumenta em uma hora. Qual é a distância entre estas cidades?

a) 1200 km
b) 1000 km
c) 800 km
d) 1400 km
e) 600 km

14)(Colégio Pedro II – 2014) De uma caixa contendo B bolas brancas e P bolas pretas, retiraram-se 15 bolas brancas, permanecendo entre as bolas restantes a relação de

1 branca para 2 pretas. Em seguida, retiraram-se 10 pretas, restando, na caixa, um número de bolas na razão de 4 brancas para 3 pretas. Um sistema de equações que permite determinar os valores de B e P pode ser representado por:

a) $\begin{cases} 2B - P = 30 \\ 3B - 4P = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} B + P = 30 \\ B - P = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2B + P = -30 \\ -3B - 4P = -5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2B + P = 30 \\ 3B - 4P = 5 \end{cases}$

Resolução da lista

1) As 50 pessoas inicialmente presentes no grupo já haviam contribuído com sua parte, e agora cada uma delas deve contribuir com mais R$ 7 . Esse valor, somado à contribuição dos novos integrantes, deve somar em R$ 510. Logo, temos a seguinte situação:

$$5x + 50 \cdot 7 = 510$$
$$5x + 350 = 510$$
$$5x = 160$$
$$x = 32$$

2) A distância percorrida no segundo e terceiro salto são funções da distância percorrida no primeiro salto. Logo, todas as distâncias podem ser expressas a partir da primeira distância.
Distância do primeiro salto: x
Distância do segundo salto: x – 1,2
Distância do terceiro salto: x – 1,2 – 1,5 ⇔ x – 2,7 (diminui 1,5 em relação ao segundo salto)
A soma das distâncias percorridas deve ser igual a 17,4 m. Logo:

$$x + (x - 1{,}2) + (x - 2{,}7) = 17{,}4$$
$$3x - 3{,}9 = 17{,}4$$
$$3x = 21{,}3$$
$$x = 7{,}1$$

3) Seja x o número de moedas e y o número de cédulas. Com um valor de R$ 1.000,00, queremos dizer que o número de moedas multiplicado pelo seu custo é igual a 1000, e o mesmo é análogo para as cédulas. Logo: $0{,}26 \cdot x = 1000 \Leftrightarrow x = \frac{1000}{0{,}26}$ e também, $0{,}17 \cdot y = 1000 \Leftrightarrow y = \frac{1000}{0{,}17}$.
Agora, fazemos a diferença: $y - x = \frac{1000}{0{,}17} - \frac{1000}{0{,}26}$

$$y - x = 5882{,}35 - 3846{,}15$$
$$y - x = 2036{,}2$$

Como o número de notas é inteiro, então a diferença é 2036.

4) Seja x o número de não-sócios e y o número de sócios. Como compareceram 200 pessoas, e cada sócio paga metade do valor, e não-sócios pagam a inteira, podemos descrever a situação pelo seguinte sistema: $\begin{cases} x + y = 200 & \text{(I)} \\ 10x + 5y = 1400 & \text{(II)} \end{cases}$
Em (I), $x = 200 - y$; substituindo em (II), obtemos: $10(200 - y) + 5y = 1400 \Leftrightarrow 2000 - 10y + 5y = 1400 \Leftrightarrow -5y = -600 \Leftrightarrow 5y = 600 \Leftrightarrow y = 120$

5) Lembre-se que porcentagem representa uma fração de denominador 100.
O trabalho escrito vale 20% da nota; logo, $Te = \frac{20}{100} \cdot 9 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \cdot 9$

A apresentação oral vale 30% da nota; logo, $Ao = \frac{30}{100} \cdot 8 \Leftrightarrow \frac{3}{10} \cdot 8$

O restante da nota será composta da nota da prova, que vale 50%. Logo, $Np = \frac{50}{100} \cdot x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot x$

Tudo deve somar em 7.

Logo:

$$\frac{1}{5} \cdot 9 + \frac{3}{10} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot x = 7$$
$$2 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 5 \cdot x = 70$$
$$18 + 24 + 5x = 70$$
$$42 + 5x = 70$$
$$5x = 28$$
$$x = 5{,}6$$

6) A empresa A cobra um total de $A = 20m + 80$ por produto, e a empresa B um total de $B = 12m + 120$ pelo mesmo produto, por mês m.

Igualamos as funções para descobrir em qual mês elas terão exatamente o mesmo custo: $A = B \Leftrightarrow 20m + 80 = 12m + 120$

$$20m - 12m = 120 - 80$$
$$8m = 40$$
$$m = 5$$

Uma vez que o valor é o mesmo para o mês 5, a empresa B passará a ser mais vantajosa a partir do quinto mês.

7) Se o ciclo dura Y segundos, então a soma do tempo do semáfaro na luz verde, amarela e vermelha soma em Y. Simultaneamente, o tempo em que a luz verde permanece acessa é uma função da luz vermelha ($\frac{2}{3}$ do tempo da luz vermelha).

Expressando a luz vermelha como uma função da luz verde, temos: $\frac{2}{3}V = X \Leftrightarrow 2V = 3X \Leftrightarrow V = \frac{3}{2}X$. Por fim, a equação resulta em:

$$X + \frac{3}{2}X + 5 = Y$$
$$2X + 3X + 10 = 2Y$$
$$5X + 10 = 2Y$$
$$5X - 2Y + 10 = 0$$

8) Seja M o número de mulheres e H o número de homens. Logo, temos o seguinte sistema linear:

$\begin{cases} H + M = 132 & \text{(I)} \\ M = H + 26 & \text{(II)} \end{cases}$ e agora basta aplicar II em I:

$H + M = 132 \Leftrightarrow H + H + 26 = 132 \Leftrightarrow 2H = 106 \Leftrightarrow H = 53$

Uma vez que o exercício nos pede a quantidade paga pelos homens convidados à festa, e homens pagam R$ 50, fazemos o produto $53 \cdot 50 = 2650$

9) Do enunciado, podemos extrair as seguintes informações:
Seja x o número de alunos que compraram somente um bilhete. Sabemos que 45 alunos compraram dois bilhetes; seja y o número de alunos que compraram três bilhetes. Logo, o total de bilhetes vendidos, Tb, é expresso por $Tb = x + 45 \cdot 2 + 3y$
Uma vez que 80 alunos não compraram bilhetes, então o total de alunos, Ta, é $Ta = x + y + 45 + 80$
Tb é o total de bilhetes vendidos, e $Tb = t + 33$
O número de ingressos vendidos excedeu em 33 o número total de alunos. Logo, temos que

$$Tb = Ta + 33 \Leftrightarrow x + 45 \cdot 2 + 3y = x + y + 45 + 80 + 33$$
$$x + 90 + 3y = x + y + 158$$
$$2y = 68$$
$$y = 34$$

Do enunciado, o total de alunos que compraram somente um bilhete é 20% do número total de bilhetes vendidos; assim, $x = \frac{1}{5}Tb \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}(x + 45 \cdot 2 + 3y) \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}(x + 90 + 3 \cdot 34)$

$$x = \frac{1}{5}(x + 90 + 102) \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}(x + 192) \Leftrightarrow 5x = x + 192 \Leftrightarrow 4x = 192 \Leftrightarrow x = 48$$

10) Seja L a infração do tipo leve e M a infração do tipo média. Logo, temos que:

$$\begin{cases} L + M = 5 \\ 3L + 4M = 17 \end{cases}$$

Em I, fazendo $L = 5 - M$ e aplicando em II, vem que:
$3(5 - M) + 4M = 17 \Leftrightarrow 15 - 3M + 4M = 17 \Leftrightarrow M = 2$
E aplicando em I, tem que $L + 2 = 5 \Leftrightarrow L = 3$
Logo, a razão procurada é $\frac{L}{M} = \frac{3}{2}$

11) Seja Vf o valor final do financiamento, N o número de parcelas e P_1 a proposta de pagamento original. Também, sendo P_2 a segunda proposta de pagamento, temos que $P_2 = P_1 - 200$, e P_3 sendo a terceira proposta de pagamento, $P_3 = P_1 + 232$.
As informações podem ser alocadas no seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} Vf = N \cdot P_1 & \text{(I)} \\ Vf = (N + 5) \cdot (P_1 - 200) & \text{(II)} \\ Vf = (N - 4) \cdot (P_1 + 232) & \text{(III)} \end{cases}$$

Igualando I = II, obtemos $N \cdot P_1 = (N + 5) \cdot (P_1 - 200) \Leftrightarrow NP_1 = NP_1 - 200N + 5P_1 - 1000 \Leftrightarrow 0 = NP_1 + 5P_1 - 200N - 1000 \Leftrightarrow 5P_1 = 200N - 1000 \Leftrightarrow P_1 = 40N + 200$
Igualando I = III e tomando $P_1 = 40N + 200$, obtemos:

$$N \cdot P_1 = (N-4)\cdot(P_1+232) \Leftrightarrow NP_1 = NP_1 + 232N - 4P_1 - 928 \Leftrightarrow 0$$
$$= 232N - 4P_1 - 928 \Leftrightarrow 0 = 232N - 4(40N+200) - 928 \Leftrightarrow 0$$
$$= 232N - 160N - 800 - 928 \Leftrightarrow 0 = 72N - 1728 \Leftrightarrow 72N = 1728$$
$$N = 24$$

12) Considere $a = 2$. Então, $\begin{cases} x+y=7 \\ 2x+2y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ 2(x+y)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ x+y=4{,}5 \end{cases}$

Logo, se $a = 2$, então $x+y$ assumem dois valores diferentes, o que é um absurdo. Asssim, temos que $a \neq 2$.

13) Uma vez que o objeto está em velocidade constante, então $d = v \cdot t$, sendo d a distância entre ambas as cidades, v a velocidade média do trem e t o tempo gasto. Observe que a distância d percorrida pelo trem é sempre a mesma.

Logo, obtemos o seguinte sistema: $\begin{cases} d = vt \quad \text{(i)} \\ d = (v+16)(t-2{,}5) \quad \text{(ii)} \\ d = (v-5)(t+1) \quad \text{(iii)} \end{cases}$

Igualando i = ii, obtemos $vt = (v+16)(t-2{,}5) \Leftrightarrow vt = vt - 2{,}5v + 16t - 40 \Leftrightarrow -2{,}5v + 16t = 40$.

E agora i = iii, $vt = (v-5)(t+1) \Leftrightarrow vt = vt + v - 5t - 5 \Leftrightarrow v - 5t = 5$

De ambas as diferenças, obtemos o sistema equivalente $\begin{cases} -2{,}5v + 16t = 40 \quad \text{(I)} \\ v - 5t = 5 \quad \text{(II)} \end{cases}$

Em II, tomando $v = 5 + 5t$ e substituindo em I, obtemos

$$-2{,}5(5+5t) + 16t = 40$$
$$-12{,}5 - 12{,}5t + 16t = 40$$
$$3{,}5t = 52{,}5$$
$$t = 15$$

Substituindo t em II, logo $v - 5\cdot(15) = 5 \Leftrightarrow v - 75 = 5 \Leftrightarrow v = 80$

Sabendo que $t = 15$ e $v = 80$, substituimos ambas em i e obtemos $d = (80)\cdot(15) \Leftrightarrow d = 1200$

14) A primeira situação nos indica a presente proporção: $\frac{B-15}{P} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(B-15) = P \Leftrightarrow 2B - 30 = P \Leftrightarrow 2B - P = 30$

A segunda situação envolve bolas pretas P e bolas brancas B. Lembre-se que nesse ponto, já retiramos 15 bolas brancas; assim, $\frac{B-15}{P-10} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(B-15) = 4(P-10)$

$$3B - 45 = 4P - 40$$
$$3B - 4P = 5$$

Ao juntarmos ambas as equações, obtemos o sistema $\begin{cases} 2B - P = 30 \\ 3B - 4P = 5 \end{cases}$

6.4 RELATÓRIO DA AULA III

No sábado, 30 de setembro de 2023, às 8 horas da manhã, ocorreu o terceiro encontro do PROMAT (Programa de Matemática) na Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE. Este encontro teve como foco o ensino equações de primeiro grau e sistema de equações de primeiro grau para o ENEM e vestibular, direcionado a alunos do ensino médio ou aqueles que planejam realizar essas provas. O encontro foi ministrado pelos estagiários Luiza Stunder, Márcio Miranda, Raianny Zerneh e Theo da Luz, com a participação de 16 alunos em nossa sala, o mesmo número da aula anterior.

No começo do encontro, foi reservado um tempo para que os alunos tivessem a oportunidade de tirar dúvidas referentes à aula anterior e à lista de exercícios da aula anterior. Não havendo dúvidas, a aula foi iniciada com o jogo racionalizei. Para tal, os alunos se dividiram em quartetos. A atividade foi produtiva, e serviu para relembrar os conceitos de potenciação e radiciação tratados no encontro anterior. Dessa maneira, o jogo exigia dos alunos cálculos e operações envolvendo propriedades anteriormente explicadas. Durante o racionalizei, todos os estagiários circularam pela sala para tirar eventuais dúvidas sobre o conteúdo e o objetivo geral do jogo.

Ao fim da atividade, foi distribuído um mapa mental sobre equações de primeiro grau que foi lido e explicado aos alunos com auxílio do quadro para a apresentação de exemplos. Ademais, foi explicado sistemas lineares, sendo apresentado exemplos e métodos resolutivos.

Concluídas as explicações, foi dado início a atividade: o jogo escadas e serpentes. Uma vez que a turma já estava separada em grupos de quatro, foi necessário apenas distribuir o tabuleiro, cartões e os dados para o jogo. Explicadas as regras do jogo, os foi dado aos alunos tempo para que jogassem.

O jogo foi extremamente produtivo, os alunos demonstraram bastante interesse no jogo e fizeram uso do mapa mental e apontamentos contidos no quadro para a resolução dos desafios do jogo.

Alguns alunos demonstraram maior dificuldade nas questões em que era necessário construir a equação e nas questões de sistemas lineares, mas no decorrer da aula as dúvidas foram sanadas e os alunos passaram a ter um maior domínio do contéudo e uma melhor interpretação matemática. O jogo fluiu, e alguns grupos até jogaram mais de uma vez, pois os alunos estavam animados. Os alunos tiveram até o fim da aula para jogar.

No geral, houve um grande engajamento por parte dos alunos e uma dinâmica de aula envolvente. Alguns alunos ainda apresentaram dificuldade na resolução de questões, sendo o problema mais evidente a transposição da linguagem usual para a matemática. No entanto, mesmo no curto tempo de 4 horas-aula, foi possível ver o desenvolvimento de alguns alunos dentro de sala. Essa experiência foi muito importante para analisar o que funciona e o que não funciona na sala de aula trabalhada. Notou-se que os alunos se mostram mais atentos e interessados quando é utilizado um jogo. A competição e inovação em relação à aula tradicional é excitante para eles. Tal aprendizado será levado em consideração para que todas as aulas possam ser o mais proveitosas possível.

7. ENCONTRO IV

7.1 PLANO DE AULA - ENCONTRO IV

Público-alvo: Alunos do 3º ano do Ensino Médio da rede pública estadual do Paraná.

Estagiários: Luiza Stunder, Márcio Vinícius Rocha Miranda, Raianny Vitória Zerneh, Theo Fernando Bonfim da Luz

Conteúdos: Equações polinomiais do 2° grau e polinômios

Objetivo geral: Revisar os conteúdos listados acima e utilizá-los para resolver questões.

Objetivos específicos:

- Entender a forma geral de uma equação polinomial de segundo grau ($ax^2 + bx + c = 0$) e seus coeficientes.
- Resolver equações quadráticas por fatoração, completando o quadrado e usando a fórmula quadrática.
- Aplicar o conceito de raízes (soluções) de equações quadráticas e entender seu significado geométrico.
- Explorar aplicações práticas de equações quadráticas, como problemas de movimento, lançamento de projéteis e maximização/minimização de áreas.
- Praticar a resolução de problemas envolvendo equações polinomiais de segundo grau em diversos contextos.
- Identificar termos-chave, como coeficiente, grau de um polinômio e termo constante.

Tempo de execução: 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Quadro, giz, atividades impressas, lápis, borracha, caderno.

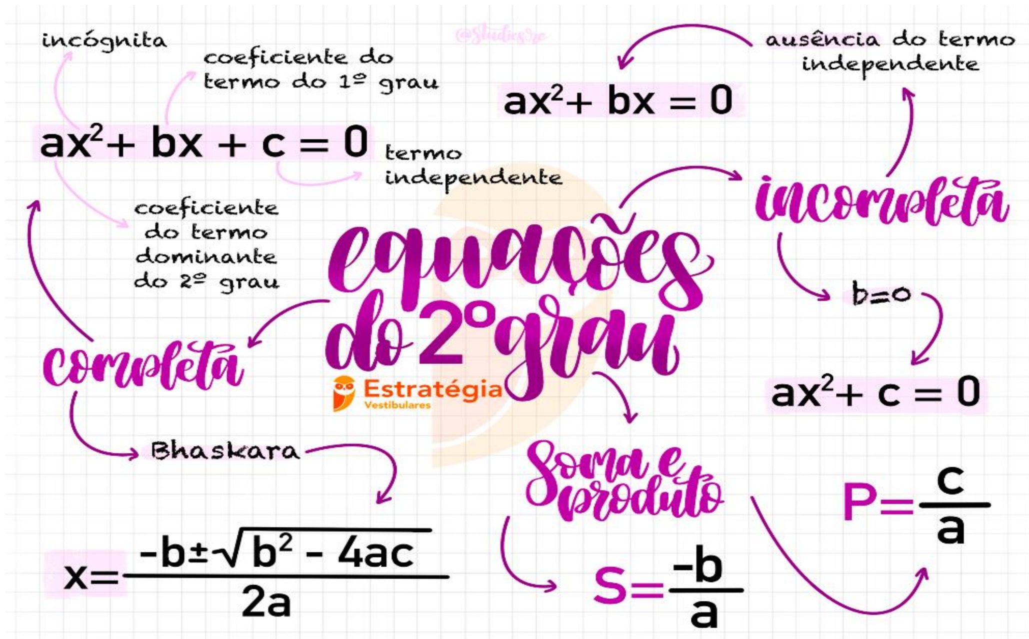
Encaminhamento Metodológico:

Iniciaremos a aula com a questões do jogo da última aula, Jogo das cobras e escadas, que mais geraram dúvidas entre os alunos. Resolveremos em torno de 3 a 4 questões.

Conteúdo de equações polinomiais

Em seguida, partiremos para apresentação de um novo conceito: equações polinomiais. Utilizaremos um mapa mental para explicar conteúdo.

Figura 17: Mapa mental de equações do segundo grau



Fonte: Passei direto.

Partiremos para exemplos dos conceitos do mapa mental.

Exemplo 1:

- **a)** $3x^2 + 4x + 1 = 0$ é uma equação do segundo grau, com $a = 3, b = 4, c = 1$.
- **b)** $x^2 - x - 1 = 0$: é uma equação com grau 2, com $a = 1, b = -1, c = -1$.
- **c)** $9x^2 - 5x = 0$: também é uma equação de grau 2, com $a = 9, b = -5, c = 0$.
- **d)** $5x^2 - 4 = 0$: equação do segundo grau, com $a = 5, b = 0, c = -4$.

Exemplo 2:

- **a)** $x^2 - 5x + 4 = 0$
- **b)** $x^2 - 5x + 6 = 0$

Resolução proposta (a):

Para encontrarmos as raízes, precisamos identificar os coeficientes *a, b* e *c.*

$$(a = 1, \qquad b = -5, \qquad c = 4)$$

Calculando o valor de Delta, teremos:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(4)$$

$$\Delta = 25 - 16$$

$$\Delta = 9$$

Utilizando a fórmula quadrática encontraremos:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2(1)}$$

Como teremos dois valores para, chamaremos de *x'* para o valor positivo obtido na raiz *e x''* valor para o valor negativo obtido na raiz.

Para x':

$$x' = \frac{5+3}{2}$$

$$x' = \frac{8}{2}$$

$$x' = 4$$

Para *x'****:***

$$x'' = \frac{5-3}{2}$$

$$x'' = \frac{2}{2}$$

$$x'' = 1$$

Logo $x = 4$ ou 1.

Resolveremos a questão exemplo 2, questão a), e em seguida pediremos para que os alunos resolvam a questão b). Finalizaremos mostrando outra forma de resolução através de soma e produto com conceitos presentes no mapa mental.

Resolução proposta $(\boldsymbol{b})$:

Sendo $(a = 1,\ b = -5,\ c = 6)$, teremos pela soma:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

$$x' + x'' = -\frac{-5}{1}$$

$$x' + x'' = 5$$

Pelo produto:

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{6}{1}$$

$$x' \cdot x'' = 6$$

x é igual a 2 e 3, pois são os números que somados encontraremos 5 e multiplicados obteremos 6.

Após a explicação dos exemplos, partiremos para situações problemas contidos na lista de de dever de casa 4. Daremos um tempo para que os alunos resolvam, enquanto passamos nas mesas tirando as dúvidas. Resolveremos os exercícios que mais gerarem dúvidas.

Iniciaremos as operações algébricas entre polinômios, definindo primeiro adição e subtração, onde a soma é dada somando os coeficientes dos termos semelhantes (mesma parte literal) e a subtração pela subtração dos respectivos coeficientes.

Exemplo 3:

a) $(-7x^3 + 5x^2y - xy + 4y) + (-2x^2y + 8xy - 7y)$

Resolução:

$$-7x^3 + 5x^2y - 2x^2y - xy + 8xy + 4y - 7y$$

$$-7x^3 + 3x^2y + 7xy - 3y$$

b) $(4x^2 - 5xk + 6k) - (3xk - 8k)$

Resolução:

$$4x^2 - 5xk + 6k - 3xk + 8k$$
$$4x^2 - 8xk + 14k$$

Finalizado os exemplos, falaremos da multiplicação e divisão de polinômios.
Na multiplicação de polinômios, devemos multiplicar termo a termo. Na multiplicação de letras iguais, repete-se, multiplica-se os coeficientes e soma-se os expoentes. Já na divisão de polinômios, primeiramente realizaremos a divisão entre os coeficientes numéricos e depois a divisão de potências de mesma base. Para isso, conserva-se a base e subtrai os expoentes. Em seguida daremos outro exemplo para aplicação.

Exemplo 4:

a) $(3x^2 - 5x + 8).(-2x + 1)$

Resolução:

$$-6x^3 + 3x^2 + 10x^2 - 5x - 16x + 8$$
$$-6x^3 + 13x^2 - 21x + 8$$

Exemplo 5:

b) $3x^3 - 14x^2 + 23x - 10 \div x^2 - 4x + 5$

Resolução:

Figura 17: Resolução da divisão de polinômios

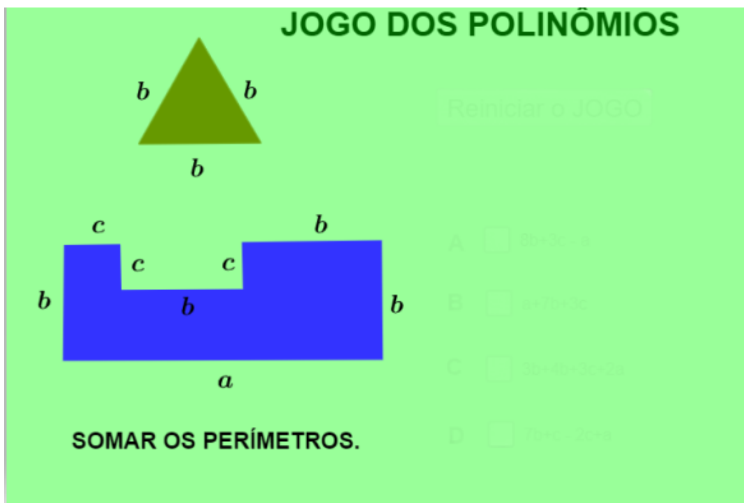
$$3x^3 - 14x^2 + 23x - 10 : x^2 - 4x + 5$$

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{3x^3} - 14x^2 + 23x - 10 & x^2 - 4x + 5 \\ \cline{2-2}
\underline{-\cancel{3x^3} + 12x^2 - 15x} & 3x - 2 \\
\quad -\cancel{2x^2} + \cancel{8x} - \cancel{10} & \\
\quad \underline{+\cancel{2x^2} - \cancel{8x} + \cancel{10}} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Fonte: Toda matéria.

Por fim, Apresentaremos uma atividade para que os alunos resolvam.

Figura 19: Soma do perímetro de dois polinômios



Fonte: Geogebra.

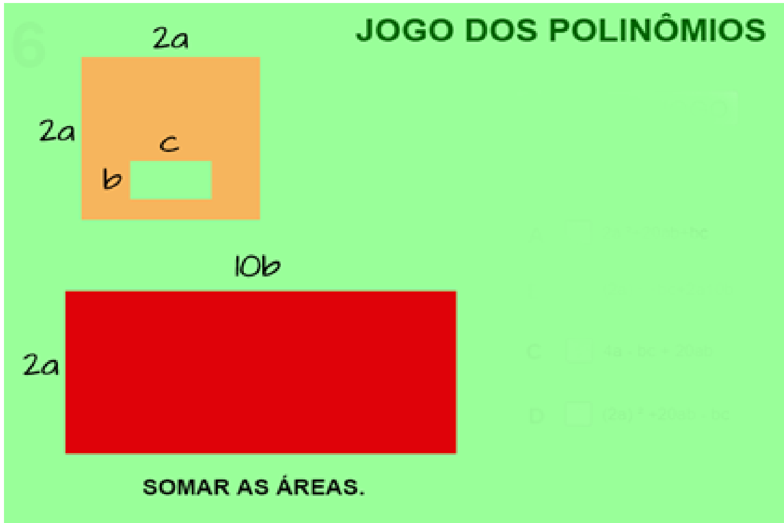
Resolução:

$$(b + b + b) + (a + b + c + c + b + c + b + b)$$

$$3b + a + 4b + 3c$$

$$a + 7b + 3c$$

Figura 20: Soma das áreas de dois polinômios



Fonte: Geogebra.

Resolução:

$$(2a * 2a) - (b * c) + (10b * 2a)$$
$$4a^2 - bc + 20ab$$

7.2 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

SULZBACH, Daisy**. Mapa Mental - Equações do 2° Grau**. Passei Direto. Disponível em: https://www.passeidireto.com/arquivo/110309245/mapa-mental-equacoes-2-grau. Acesso em: 02 out. 2023.

NOVAES, Jean Carlos**. Equação do segundo Grau.** Matemática Básica. Disponível em: https://matematicabasica.net/equacao-do-2-grau-segundo-grau/#definicao. Acesso em: 05 out. 2023.

GOVEIA, Rosimar. **Polinômios**. Toda Matéria. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/polinomios/. Acesso em: 05 out. 2023.

DOS SANTOS, Fábio Freire; TOMSON, Paulo. **Jogo dos Polinômios.** Geogebra. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/gqjkr5te. Acesso em: 05 out. 2023.

7.3 MATERIAL UTILIZADO

Lista de dever de casa 4: equações quadráticas

1) (IFSC 2017) Pedro é pecuarista e, com o aumento da criação, ele terá que fazer um novo cercado para acomodar seus animais. Sabendo-se que ele terá que utilizar 5 voltas de arame farpado e que o cercado tem forma retangular cujas dimensões são as raízes da equação $x^2 - 45x + 500 = 0$, qual a quantidade mínima de arame que Pedro terá que comprar para fazer esse cercado?

a) 545 m.

b) 225 m.

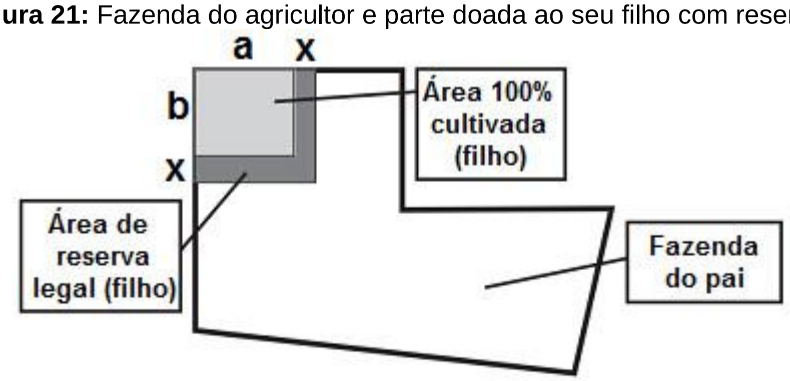
c) 200 m.

d) 500 m.

e) 450 m.

2) (ENEM 2009) Um fazendeiro doa, como incentivo, uma área retangular de sua fazenda para seu filho, que está indicada na figura como 100% cultivada. De acordo com as leis, deve-se ter uma reserva legal de 20% de sua área total. Assim, o pai resolve doar mais uma parte para compor a reserva para o filho, conforme a figura.

Figura 21: Fazenda do agricultor e parte doada ao seu filho com reserva legal



Fonte: INEP

De acordo com a figura acima, o novo terreno do filho cumpre a lei, após acrescentar uma faixa de largura x metros contornando o terreno cultivado, que se destinará à reserva legal (filho). O dobro da largura x da faixa é:

a) $10\%(a+b)^2$

b) $10\%(a \cdot b)^2$

c) $\sqrt{a+b} - (a+b)$

d) $\sqrt{(a+b)^2 + ab} - (a+b)$

e) $\sqrt{(a+b)^2 + ab} + (a+b)$

3) (ENEM 2021 Reaplicação) Um diretor esportivo organiza um campeonato no qual haverá disputa de times em turno e returno, isto é, cada time jogará duas vezes com todos os outros, totalizando 380 partidas a serem disputadas.
A quantidade de times (x) que faz parte desse campeonato pode ser calculada pela equação:

a) $\mathrm{x} = 380 - \mathrm{x}^2$

b) $\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} = 380$

c) $\mathrm{x}^2 = 380$

d) $2\mathrm{x} - \mathrm{x} = 380$

e) $2\mathrm{x} = 380$

4) (ENEM 2021) Para a comunicação entre dois navios é utilizado um sistema de codificação com base em valores numéricos. Para isso, são consideradas as operações triângulo Δ e estrela $*$, definidas sobre o conjunto dos números reais por $x \Delta y = x^2 + xy - y^2$ e $x * y = xy + x$. O navio que deseja enviar uma mensagem deve fornecer um valor de entrada b, que irá gerar um valor de saída, a ser enviado ao navio receptor, dado pela soma das duas maiores soluções da equação $(a \Delta b) * (b \Delta a) = 0$.
Cada valor possível de entrada e saída representa uma mensagem diferente já conhecida pelos dois navios. Um navio deseja enviar ao outro a mensagem "ATENÇÃO!". Para isso, deve utilizar o valor de entrada $b = 1$. Dessa forma, o valor recebido pelo navio receptor será:

a) $\sqrt{5}$

b) $\sqrt{3}$

c) $\sqrt{1}$

d) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

e) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

5) (VUNESP 2018) A soma das raízes da equação $x^2 - (3a - 2b)x + 2b - 6a = 0$ é igual a 8 e seu produto é igual a –20. Desse modo, o resultado da operação $a^b : b^a$ é igual a:

a) 2

b) -1

c) 4

d) $\frac{1}{2}$

e) 1

6) (FUNTEF-PR 2019) A área de um terreno pode ser representada pela expressão algébrica $x^2 + 16x + 64$. Sabendo que esse terreno tem a forma de um quadrado, assinale a alternativa que indica a expressão algébrica que representa a medida do lado desse terreno

a) $x + 5$

b) $x + 6$

c) $x + 7$

d) $x + 8$

e) $x + 9$

7) (FGV-SP 2016) Alfredo e Breno partem, ao mesmo tempo, dos pontos A e B, respectivamente, ambos caminhando sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$, mas em sentidos contrários. No momento em que eles se encontram, Alfredo havia percorrido 18 km a mais do que Breno. Logo depois do encontro, eles continuam suas caminhadas sendo que Alfredo leva 4 horas para chegar em B, percorrendo x quilômetros, e Breno leva 9 horas para chegar em A. Admitindo-se que Alfredo e Breno fizeram suas caminhadas com velocidades constantes durante todo o tempo, x será a raiz positiva da equação:

a) $5x^2 - 36x - 684 = 0$

b) $5x^2 - 72x - 1296 = 0$

c) $5x^2 - 72x - 1368 = 0$

d) $5x^2 - 144x - 1296 = 0$

e) $5x^2 - 144x - 1368 = 0$

8) (FAG Vestibular, 2015) O valor de n, para que a equação $x^2 - (n - 1)x + n - 2 = 0$ tenha raiz dupla, é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

9) (OBMEP 2005) Para cercar um terreno retangular de 60 metros quadrados com uma cerca formada por dois fios de arame foram usados 64 metros de arame. Qual é a diferença entre o comprimento e a largura do terreno?

a) 4

b) 7

c) 11

d) 17

e) 28

10) (UFPI) Um criador de aves verificou que, após colocar (n +2) aves em cada um dos n viveiros disponíveis, sobraria apenas uma ave. O número total de aves, para qualquer valor de n natural, é sempre:

a) um número par.

b) um número ímpar.

c) um quadrado perfeito.

d) um número divisível por 3.

e) um número primo.

11) (EFOMM 2018) Uma aluna do 3º ano da EFOMM, responsável pelas vendas dos produtos da SAMM (Sociedade Acadêmica da Marinha Mercante), percebeu que, com a venda de uma caneca a R$ 9,00, em média 300 pessoas compravam, quando colocadas as canecas à venda em um grande evento. Para cada redução de R$ 1,00 no preço da caneca, a venda aumentava em 100 unidades. Assim, o preço da caneca, para que a receita seja máxima, será de:

a) R$ 8,00.

b) R$ 7,00

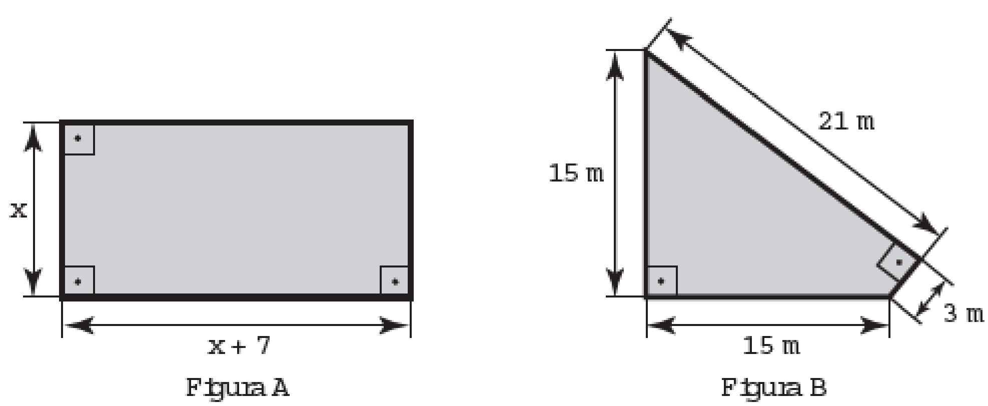
c) R$ 6,00

d) R$ 5,00.

e) R$ 4,00.

12) (ENEM 2021) Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

Figura 22: Terreno retangular e no formato de quadrilátero



Fonte: INEP

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a

a) 7,5 e 14,5

b) 9,0 e 16,0s

c) 9,3 e 16,3

d) 10,0 e 17,0

e) 13,5 e 20,5

Resolução da lista de dever de casa 4

1) Vamos inferir as dimensões do cercado ao descobrir suas raízes:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Longrightarrow 45^2 - 4 \cdot (1) \cdot (500) = 2025 - 2000 = 25$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Longrightarrow \frac{-(-45) \pm \sqrt{25}}{2} \Longrightarrow \frac{45 \pm 5}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{45+5}{2} \Rightarrow \frac{50}{2} \Rightarrow 25 \\ x_2 = \frac{45-5}{2} \Rightarrow \frac{40}{2} \Rightarrow 20 \end{cases}$$

O cercado possui dimensões de 25 m, 20 m. É dito que o pecuarista precisará de 5 voltas de arame farpado para cercar o terreno; ou seja, é o mesmo que multiplicar o perímetro (soma de todos os lados) por 5. Assim:

$$\Longrightarrow (25 + 25 + 20 + 20) \cdot 5 = 90 \cdot 5 = \mathbf{450\ m}$$

2) Idealmente, precisamos transformar essas informações em uma expressão de segundo grau, onde é possível expressar x como uma função de a e b.

Note que, as dimensões do terreno doado, acrescentada da área de reserva legal, é $l_1 = (b + x)$ e $l_2 = (a + x)$. Podemos calcular a área do terreno através de $A = l_1 l_2$:

$$A = (a + x)(b + x) = ab + ax + bx + x^2 = x^2 + (a + b)x + ab$$

Podemos aplicar 80% em ambos os lados; fazendo isso, note que $80\% \cdot A$ é o mesmo que tomar a área cultivada do filho, após o fazendeiro ter doado mais 20% para manter o tamanho original. Assim:

$$\begin{aligned} &80\% \cdot A = 80\% \cdot (x^2 + (a + b)x + ab) \\ &\frac{4}{5} \cdot A = \frac{4}{5} \cdot (x^2 + (a + b)x + ab) \\ &ab = \frac{4}{5} \cdot (x^2 + (a + b)x + ab) \\ &5ab = 4 \cdot (x^2 + (a + b)x + ab) \\ &5ab = 4x^2 + (a + b)4x + 4ab \\ &\Longrightarrow 4x^2 + 4(a + b)x - ab = 0 \end{aligned}$$

Obtemos uma equação quadrática. Vamos resolver para x:

$$\begin{aligned} \Delta = b^2 - 4ac \Longrightarrow &[4(\mathrm{a} + \mathrm{b})]^2 - 4 \cdot (4) \cdot (-\mathrm{ab}) = [16(\mathrm{a} + \mathrm{b})^2] + 16\mathrm{ab} \\ &= 16[(a + b)^2 + ab] \end{aligned}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Longrightarrow \frac{-4(\mathrm{a} + \mathrm{b}) \pm \sqrt{16[(a + b)^2 + ab]}}{2 \cdot 4}$$

$$\Longrightarrow \frac{-4(\mathrm{a} + \mathrm{b}) \pm 4\sqrt{(a + b)^2 + ab}}{8}$$

$$\Longrightarrow \frac{4\left[-(\mathrm{a} + \mathrm{b}) \pm \sqrt{(a + b)^2 + ab}\right]}{8}$$

$$\Longrightarrow \frac{-(\mathrm{a} + \mathrm{b}) \pm \sqrt{(a + b)^2 + ab}}{2}$$

A expressão acima apresenta os dois possíveis valores para x. Veja que o valor negativo, x_2 é estritamente negativo, e o valor positivo, x_1, apresenta um sinal positivo para a expressão, uma vez que $\sqrt{[(a+b)^2+ab]} > -(\mathrm{a}+\mathrm{b})$; assim, consideremos apenas x_1, pois não pode haver valor de comprimento negativo.
O exercício nos pede o dobro da largura, ou seja, $2x_1$:

$$2x_1 = 2 \cdot \left[\frac{-(\mathrm{a}+\mathrm{b}) + \sqrt{(a+b)^2+ab}}{2}\right]$$
$$2x_1 = -(\mathrm{a}+\mathrm{b}) + \sqrt{(a+b)^2+ab}$$
$$\boldsymbol{2x_1} = \sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+\boldsymbol{ab}} - (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

3) Cada time precisará jogar com todos os outros. Ou seja, para cada time, está associado uma quantidade de $x-1$ jogos. A essa quantidade de $x-1$ jogos, chamamos de *rodada*, que é precisamente o fato de um time ter jogado com todos os demais.
Note que, a cada jogo, são dois times que jogam. Então, sendo x a quantidade de times, teremos $\frac{x}{2}$ jogos *por rodada*, uma vez que novamente, cada time joga com um outro e precisa jogar com todos os demais times.
É dito que cada time jogará duas vezes. Ou seja, teremos dois turnos (turno e returno), e portanto teremos um fator multiplicativo de 2.
Calculamos a quantidade de partidas com a equação $(n° \, de \, rodadas) \cdot (n° \, de \, partidas \, por \, rodada) \cdot (n° \, de \, turnos) = n° \, de \, partidas$. Nos é dito que são 380 partidas. Assim:

$$\Rightarrow (x-1) \cdot \left(\frac{x}{2}\right) \cdot (2) = 380$$
$$\Rightarrow (x-1) \cdot x = 380$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{x^2 - x = 380}$$

4) Veja que temos duas operações diferentes as quais precisamos trabalhar. Podemos primeiro, obter a forma genérica dessas duas operações e depois substituir $b = 1$.

$$\Rightarrow (a\Delta b) * (b\Delta a) = 0$$
$$\Rightarrow (a^2+ab-b^2) * (b^2+ba-a^2) = 0$$
$$\Rightarrow (a^2+ab-b^2)(b^2+ba-a^2) + (a^2+ab-b^2) = 0$$

substituindo $b = 1$, vem que

$$\Rightarrow (a^2+a-1)(1+a-a^2) + (a^2+a-1) = 0$$
$$\Rightarrow (a^2+a-1)[(1+a-a^2)+1] = 0$$
$$\Rightarrow (a^2+a-1)[-a^2+a+2] = 0$$

Veja que da expressão acima, ela satisfaz a igualdade (é nula) se e somente se, um dos termos do produto também for nulo. Assim, $a^2+a-1=0$ ou $-a^2+a+2=0$.
Uma vez que o exercício nos pede a *soma das duas maiores raizes da equação,* precisamos calcular as raízes de ambas as equações, determinar as duas maiores e por fim somá-las.

i. $\boldsymbol{a^2+a-1=0}$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow 1^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Longrightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

ii. $\boldsymbol{-a^2 + a + 2 = 0}$

$\Delta = b^2 - 4ac \Longrightarrow 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (2) = 1 + 8 = 9$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Longrightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} \Longrightarrow \frac{-1 \pm 3}{-2} \Longrightarrow \begin{cases} x_3 = \dfrac{-1+3}{-2} = \dfrac{2}{-2} = -1 \\ x_4 = \dfrac{-1-3}{-2} = \dfrac{-4}{-2} = 2 \end{cases}$$

Das quatro raízes possíveis, duas são negativas, $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ e $x_3 = -1$. As duas restantes são positivas, e portanto são as duas maiores. Logo, a solução é a soma de ambas as raízes positivas, $x_1 + x_4$.

$$\Longrightarrow x_1 + x_4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 2$$
$$\Longrightarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{4}{2}$$
$$\Longrightarrow \boldsymbol{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

5) Da equação acima, note que os seus coeficientes são os seguintes: $A = 1$, $B = 3a - 2b$ e $C = 2b - 6a$. Simultaneamente, uilizando as noções de soma e produto de raízes, é válido o seguinte sistema já conhecido: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} \\ x_1 x_2 = \frac{C}{A} \end{cases}$

Substituindo os valores, vem que: $\begin{cases} -[-(3a - 2b)] = 8 \quad (i) \\ 2b - 6a = -20 \quad (ii) \end{cases}$

Tomando (*ii*), simplificando e isolando b vem que $b - 3a = -10 \Longrightarrow b = 3a - 10$.

Agora substituindo b em (*i*), temos $3a - 2(3a - 10) = 8 \Longrightarrow 3a - 6a + 20 = 8 \Longrightarrow -3a + 20 = 8 \Longrightarrow -3a = -12 \Longrightarrow a = 4$

Se $a = 4$, substituindo em (*ii*), vem que $2b - 6 \cdot 4 = -20 \Longrightarrow 2b - 24 = -20 \Longrightarrow 2b = 4 \Longrightarrow b = 2$

Conhecidos os valores a e b, substituimos em $a^b : b^a$, e

$$a^b : b^a = 4^2 : 2^4 = 16 : 16 = \frac{16}{16} = \mathbf{1}$$

6) Como o terreno trata-se de um quadrado, então os lados serão iguais. Logo, a medida da área é dada por l^2. Sabemos que a medida necessariamente é um valor x *acrescido de algo*. Para fins comparativos, chamemos este algo de b.

Assim, temos que $A = l^2 = (x + b)^2 = x^2 + 2xb + b^2$

Façamos uma comparação da expressão obtida com a expressão algébrica do enunciado: $x^2 + 2xb + b^2 \therefore x^2 + 16x + 64$

É possível notar que, para a expressão verificar-se, $b^2 = 64 \Leftrightarrow b = 8$
Logo, a medida do lado do terreno é $\boldsymbol{x+8}$.

7) A variável que devemos trabalhar é a distância percorrida x.
Seja a equação que relaciona distância, tempo e velocidade, $d = vt$.
Seja V_A a velocidade de Alfredo e V_B a velocidade de Breno. Logo, no momento do encontro de ambos, temos o seguinte sistema linear: $\begin{cases} V_A \cdot t = x + 18 \\ V_B \cdot t = x \end{cases} \quad (i)$
Após o encontro, Alfredo leva 4 horas para chegar em B e Bruno leva 9 horas para chegar em A. Mas Alfredo já havia percorrido 18 km a mais que Bruno. Ou seja, no momento de encontro, para chegar a B, Alfredo precisa percorrer x (distância percorrida por Bruno) e Bruno precisa percorrer x+18 (distância percorrida por Alfredo). Ou seja: $\begin{cases} V_A \cdot 4 = x \\ V_B \cdot 9 = x + 18 \end{cases} \quad (ii)$
Vamos dividir ambos os sistemas termo a termo:

$$\begin{cases} V_A \cdot t = x + 18 \\ V_B \cdot t = x \end{cases} \quad (i) \Rightarrow \frac{V_A \cdot t}{V_B \cdot t} = \frac{x+18}{x} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{x+18}{x}$$

$$\begin{cases} V_A \cdot 4 = x \\ V_B \cdot 9 = x + 18 \end{cases} \quad (ii) \Rightarrow \frac{V_A \cdot 4}{V_B \cdot 9} = \frac{x}{x+18} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{9}{4}\left(\frac{x}{x+18}\right)$$

Estamos falando da mesma razão, $\frac{V_A}{V_B}$. Logo, basta substituir ambos os valores de $\frac{V_A}{V_B}$:

$\Rightarrow \frac{9}{4}\left(\frac{x}{x+18}\right) = \frac{x+18}{x}$
$\Rightarrow 9x^2 = 4(x+18)(x+18)$
$\Rightarrow 9x^2 = 4(x^2 + 36x + 324)$
$\Rightarrow 9x^2 = 4x^2 + 144x + 1296$
$\Rightarrow \boldsymbol{5x^2 - 144x - 1296 = 0}$

8) Sabemos que, quando a equação possui discriminante nulo ($\Delta = 0$), ela admite duas raízes positivas iguais (raiz dupla).Assim:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow (n-1)^2 - 4(1)(n-2) \Leftrightarrow n^2 - 2n + 1 - 4n + 8 \Leftrightarrow n^2 - 6n + 9$$
$$\Leftrightarrow (n-3)(n-3) \Leftrightarrow (n-3)^2$$

Logo, vem que $\boldsymbol{n = 3.}$

9) Uma vez que trata-se de um terreno retângular, ambos os lados são diferentes. Sejam os lados em questão l_1 e l_2.
Nos é dito que a área do terreno é de $60\ m^2$ e que usou-se *dois* fios de arame para cercar o terreno. Logo, deram-se duas voltas de arame no terreno, o que significa que seu perímetro é de metade disto: $\frac{64}{2} = 32$.
Temos o seguinte sistema: $\begin{cases} l_1 l_2 = 60 \\ 2l_1 + 2l_2 = 32 \Leftrightarrow l_1 + l_2 = 16 \end{cases}$

Note que esse sistema é idêntico ao de soma e produto; no caso, $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

Adequando as constantes do primeiro sistema ao do segundo, tomando $a = 1$, vem que $\frac{-b}{a} = 16 \Leftrightarrow -b = 16 \Leftrightarrow b = -16$ e $\frac{c}{a} = 60 \Leftrightarrow c = 60$.
Por fim, a equação que descreve o terreno é $x^2 - 16x + 60 = 0$; resolvendo-a, obtemos as raízes da equação que são precisando os lados l_1 e l_2.
$\Delta = b^2 - 4ac \Longrightarrow (-16)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (60) = 256 - 240 = 16$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Longrightarrow \frac{-(-16) \pm \sqrt{16}}{2} \Longrightarrow \frac{16 \pm 4}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{16+4}{2} \Rightarrow \dfrac{20}{2} \Rightarrow 10 \\ x_2 = \dfrac{16-4}{2} \Rightarrow \dfrac{12}{2} \Rightarrow 6 \end{cases}$$

A diferença procurada é $\mathbf{10 - 6 = 4\ m}$

10) Temos uma quantidade de $n + 2$ aves dispostas em n viveiros.
Logo, a quantidade total de aves, a qual chamaremos de x, é o produto da quantidade de aves, pela quantidade de viveiros, adicionada da ave que sobrou.

$$\Longrightarrow (n+2)n + 1 = x$$
$$\Longrightarrow n^2 + 2n + 1 = x$$

Resolvendo a equação do primeiro membro da igualdade por soma e produto, vem que

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2}{1} = -2 \\ x_1 x_2 = \dfrac{1}{1} = 1 \end{cases}$$

Logo, temos duas raízes iguais, $x_1 = x_2 = -1$ e a equação pode ser fatorada a partir de suas raízes, como $(n - (-1))^2 = x \Leftrightarrow (n+1)^2 = x$
Portanto, **x é um quadrado perfeito.**

11) Podemos montar uma equação que fornce o lucro da venda de canecas:

$$(9 - x) \cdot (300 + 100x)$$

Vamos substituir valores de x até percorrer todos os valores das alternativas e verificar qual dá mais lucro. Perceba que o que é relevante é que o termo $(9 - x)$ percorra as alternativas, uma vez que este é o valor unitário da caneca.

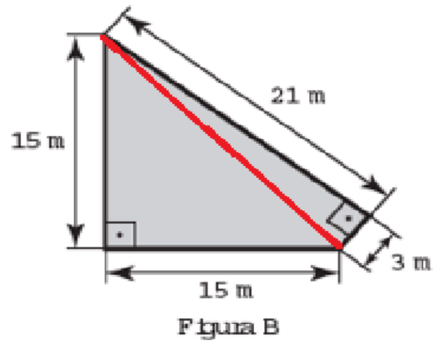
- $x = 0$; então, $(9 - 0)\big(300 + 100(0)\big) \Leftrightarrow (9)(300) \Leftrightarrow 2700$
- $x = 1$; então, $(9 - 1)\big(300 + 100(1)\big) \Leftrightarrow (8)(400) \Leftrightarrow 3200$
- $x = 2$; então, $(9 - 2)\big(300 + 100(2)\big) \Leftrightarrow (7)(500) \Leftrightarrow 3500$
- $x = 3$; então, $(9 - 3)\big(300 + 100(3)\big) \Leftrightarrow (6)(600) \Leftrightarrow 3600$
- $x = 4$; então, $(9 - 4)\big(300 + 100(4)\big) \Leftrightarrow (5)(700) \Leftrightarrow 3500$
- $x = 5$; então, $(9 - 5)\big(300 + 100(5)\big) \Leftrightarrow (4)(800) \Leftrightarrow 3200$

Podemos observar que **o maior lucro é quando assumimos o unitário da caneca como R$ 6,00**

12) Sabemos que a medida de área de ambos os terrenos deve ser a mesma. Logo, devemos encontrar um valor de x para o comprimento do terreno A que faça a área de A ser igual à área de B. Primeiro, precisamos descobrir a área de B.

Note que a figura B pode ser decomposta em dois triângulos diferentes, da seguinte forma:

Figura 23: Terreno no formato de quadrilátero explicitado como a soma de dois triângulos



Fonte: INEP

Ou seja, temos um triângulo retângulo de base 15 m e altura 15 m, e outro triângulo retângulo de base 3 m e altura 21 m.

A fórmula de área do triângulo é $A_\Delta = \frac{bh}{2}$.

Aplicando na fórmula, o triângulo maior possui $A_{\Delta 1} = \frac{15 \cdot 15}{2} = 112{,}5$, e o triângulo menor possui $A_{\Delta 2} = \frac{3 \cdot 21}{2} = 31{,}5$. Portanto, a área total é a soma de ambas as áreas; então, $A_T = A_{\Delta 1} + A_{\Delta 2} = 112{,}5 + 31{,}5 = 144$

Agora basta igualar a metragem da figura A com a da figura B e resolver para x:

$$\Longrightarrow (x+7)x = 144$$

$$\Longrightarrow x^2 + 7x - 144 = 0$$

Resolvendo por Bháskara, vem que:

$\Delta = b^2 - 4ac \Longrightarrow 7^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-144) = 49 + 576 = 625$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Longrightarrow \frac{-7 \pm \sqrt{625}}{2} \Longrightarrow \frac{-7 \pm 25}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-7+25}{2} \Rightarrow \dfrac{18}{2} \Rightarrow 9 \\ x_2 = \dfrac{-7-25}{2} \Rightarrow \dfrac{-32}{2} \Rightarrow -16 \end{cases}$$

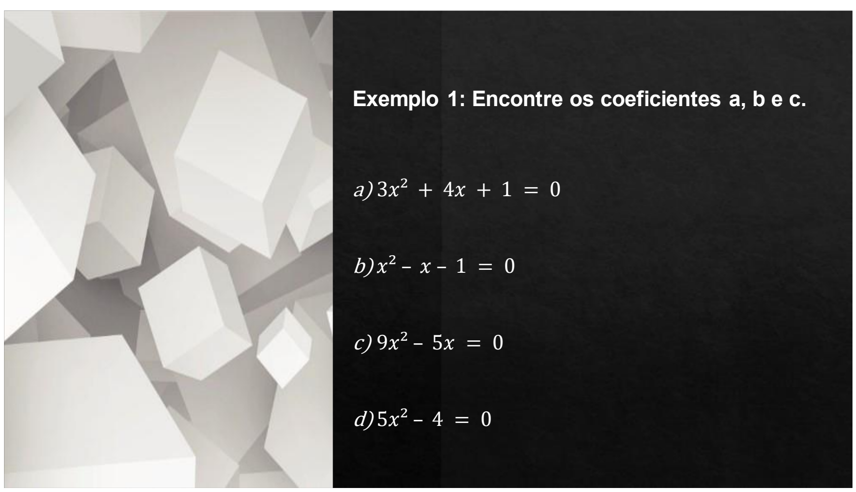
Como não pode haver valor negativo de comprimento, segue que necessariamente x=9.

Substituindo x na área do terreno, **temos largura de valor 9 e comprimento de valor $\mathbf{9 + 7 = 16}$.**

Slides


EQUAÇÃO
DO
SEGUNDO
GRAU


incógnita
coeficiente do termo do 1º grau
$ax^2 + bx + c = 0$
termo independente
coeficiente do termo dominante do 2º grau
ausência do termo independente
$ax^2 + bx = 0$
incompleta
$b=0$
$ax^2 + c = 0$
equações do 2º grau
Estratégia
completa
Bhaskara
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Soma e produto
$S = \frac{-b}{a}$
$P = \frac{c}{a}$


Exemplo 1: Encontre os coeficientes a, b e c.
$a) 3x^2 + 4x + 1 = 0$
$b) x^2 - x - 1 = 0$
$c) 9x^2 - 5x = 0$
$d) 5x^2 - 4 = 0$

Exemplo 2: Encontre as raízes da equação

$a) x^2 - 5x + 4 = 0$

$b) x^2 - 5x + 6 = 0$

Polinômio (operações)

- Adição de Polinômios: fazemos essa operação somando os coeficientes dos termos semelhantes (mesma parte literal).

- Subtração de Polinômios: o sinal de menos na frente dos parênteses inverte os sinais de dentro dos parênteses. Após eliminar os parênteses, devemos juntar os termos semelhantes.

Exemplo 3:

$a) (-7x^3 + 5x^2y - xy + 4y) + (-2x^2y + 8xy - 7y)$

$b) (4x^2 - 5xk + 6k) - (3xk - 8k)$

Polinômio (operações)

- Na multiplicação de letras iguais, repete -se, multiplica -se os coeficientes e soma-se os expoentes.

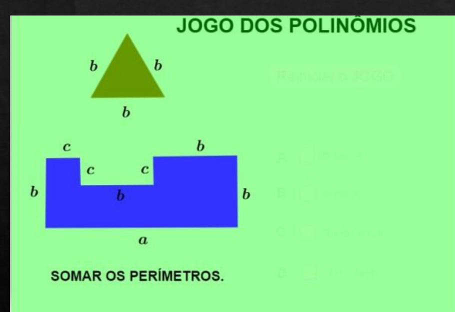
- Na divisão, primeiramente realizaremos a divisão entre os coeficientes numéricos e depois a divisão de potências de mesma base. Para isso, conserva-se a base e subtraia os expoentes.

Exemplo 4:

$a)\ (3x^2 - 5x + 8) \,.\, (-2x + 1)$

$b)\ (3x^3 - 14x^2 + 23x - 10) \,/\, (x^2 - 4x + 5)$

ATIVIDADE




ATIVIDADE
JOGO DOS POLINÔMIOS
2a
2a
c
b
10b
2a
SOMAR AS ÁREAS.

7.4 RELATÓRIO DO ENCONTRO IV

No sábado, 07 de outubro de 2023, às 8 horas da manhã, ocorreu o quarto encontro do PROMAT (Programa de Matemática) na Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE. O foco do encontro foi o ensino de equações quadráticas e polinõmios. O encontro foi ministrado pelos estagiários Luiza Stunder, Márcio Miranda, Raianny Zerneh e Theo da Luz, com a participação de 20 alunos em nossa sala.

No início do encontro, os alunos foram divididos em quartetos e e foram resolvidas das questões da lista de exercícios da aula anterior que geraram dúvidas. A principal sendo a questão 13 da lista anterior, que foi deixada como desafio para essa aula. Foi dado um tempo para que os alunos pudessem resolver, porém como os alunos estavam tendo muita dificuldade e estavam tomando mais tempo do que programado foi feita a resolução do quadro com eles. Alguns alunos interagiram, tirando dúvidas no momento da resolução.

Em seguida, foi explicado o conteúdo previsto para o encontro: equação polinomial do segundo grau. Para isso foi usado um mapa mental. A explicação do mapa acabou sendo maçante e com pouco engajamento por parte dos alunos. Daí, veio a dúvida se realmente é vantajoso o uso de mapa mentais em todas as aulas. Após o debate, foi deduzido que o problema estava em nossa explicação, e não no mapa mental. Após a explicação do mapa foram feitos alguns exemplos para que os alunos identificassem os coeficientes da equação de segundo grau e utilizassem a fórmula resolutiva do segundo grau. Alguns alunos resolveram rapidamente, enquanto outros não sabiam nem iniciar. Com isso, percebeu-se que as explicações do mapa não estavam sendo tão efetivas e que parte dos alunos tinham dificuldades quanto aos conceitos.

Após o intervalo, foi feito a atividade “dominó das equações”. Como os alunos não entenderam muito bem as regras após explicadas, foi pedido a eles que começassem o jogo e foi auxiliado cada um dos grupos de maneira isolada. Enquanto os alunos com dúvidas e maiores dificuldades receberam auxílio, os alunos que tinham mais facilidade e melhor domínio do conteúdo foram incentivados a buscar novas estratégias resolutivas, e pedidos para que compartilhassem suas estratégias após o jogo. Vimos que novamente o jogo demorou mais do que o esperado, devido às dificuldades individuais e à dificuldade que o jogo trazia, afinal cada aluno tinha 7 peças com uma equação para ser resolvida, tendo ao todo 28 equações.

Finalizada a atividade, foi apresentado a eles outra forma de resolver equações do segundo grau: o método de soma e produto. Alguns alunos tiveram dificuldades, pois eles não tiveram contato com esse método. Demos um exemplo mostrando como poderíamos resolver por esse método e então deixamos um segundo exemplo para que os alunos resolvessem. Após o tempo dado, o exemplo foi corrigido junto com os alunos.

No geral, tanto a atividade do início da aula quanto o jogo após o intervalo geraram um bom engajamento por parte dos alunos enquanto a explicação do mapa mental acabou sendo um pouco monótona. Além disso, o plano de aula não foi seguido de maneira adequada, não sendo concluído no encontro. Ademais, em um dado momento, uma aluna teve uma dúvida que não foi compreendida pelo estagiário responsável pela explicação no momento, porém o orientador presente e outro estagiário auxiliaram para sanar a dúvida da aluna.

8. ENCONTRO V

8.1 PLANO DE AULA - ENCONTRO V

Público-alvo: Alunos de todos os anos do Ensino Médio da rede pública estadual do Paraná.

Estagiários: Luiza Stunder, Márcio Vinícius Rocha Miranda, Raianny Vitória Zerneh, Theo Fernando Bonfim da Luz.

Conteúdos: Função afim.

Objetivo geral: Relembrar os conceitos anteriormente listados e utilizá-los para resolver questões de nível ENEM e vestibulares em geral.

Objetivos específicos:

- Compreender a noção de função;
- Identificar os conjuntos domínio e imagem de uma função;
- Reconhecer a função afim, $ax + b = 0$ e identificar seus coeficientes a, b;
- Entender como fazer o gráfico de uma função afim, compreendendo a reta associada à função;
- Compreender o que a raiz da função significa geometricamente;
- Capacitar os alunos a identificar problemas e trabalhar em resoluções envolvendo função afim, como decaimentos de fenômenos lineares (preços, consumos), aumentos lineares, fenômenos envolvendo lucro etc.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 4 horas.

Recursos didáticos: Quadro, giz, atividades impressas, lápis, borracha, caderno.

ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO

Retomada da aula anterior

Iniciaremos a aula dando a oportunidade aos alunos para que tirem suas dúvidas referentes à aula anterior, incentivando que peçam novas explicações caso algo não tenha ficado claro. Também tiraremos dúvidas referentes à lista de exercícios que foi deixada como dever de casa.

(máximo de 15 minutos)

Jogo sobre funções

Figura 24: Faixas de cores

0	1	2	3	4	5
0	2	4	6	8	10
0	-1	-2	-3	-4	-5
0	1	4	9	16	25
3	5	7	9	11	13
-3	-1	1	3	5	7

Fonte: RELATÓRIO FINAL PROMAT 2022. GABRIELLA;NEVIR;THAIS;RICARDO

Separaremos a sala em duplas, e distribuiremos uma atividade para os alunos, com propósito investigativo. Pediremos para que encontrem relações – preferencialmente de forma algébrica – entre as diversas faixas de cores. O objetivo é que os alunos criem uma noção instintiva sobre funções: o valor inserido na primeira faixa, sobre uma alteração mediante certa lei de formação, e resulta na segunda faixa.

O gabarito das possíveis relações é o que segue.

Sendo,

Conjunto A: Verde

Conjunto B: Amarelo

Conjunto C: Vermelho

Conjunto D: Azul

Conjunto E: Roxo

Conjunto F: Branco

Então:

- Relação de A com B: $2x$
- Relação de C com D: x^2
- Relação de E com F: $x - 6$
- Relação de A com D: x^2
- Relação de D com A ou C (perguntar em qual conjunto):$\sqrt{x}$
- Relação de B com F: $x - 3$
- Relação de F com A: $\frac{x+3}{2}$
- Relação de C com A: $-x$
- Relação de A com E: $2x + 3$
- Relação de E com B: $x - 3$
- Relação de B com D (menção proposital para analisar a atenção): $\frac{1}{2} \cdot x^2$

Ao fim do tempo dado, vamos explicitar as relações entre as faixas de cores, listadas acima.

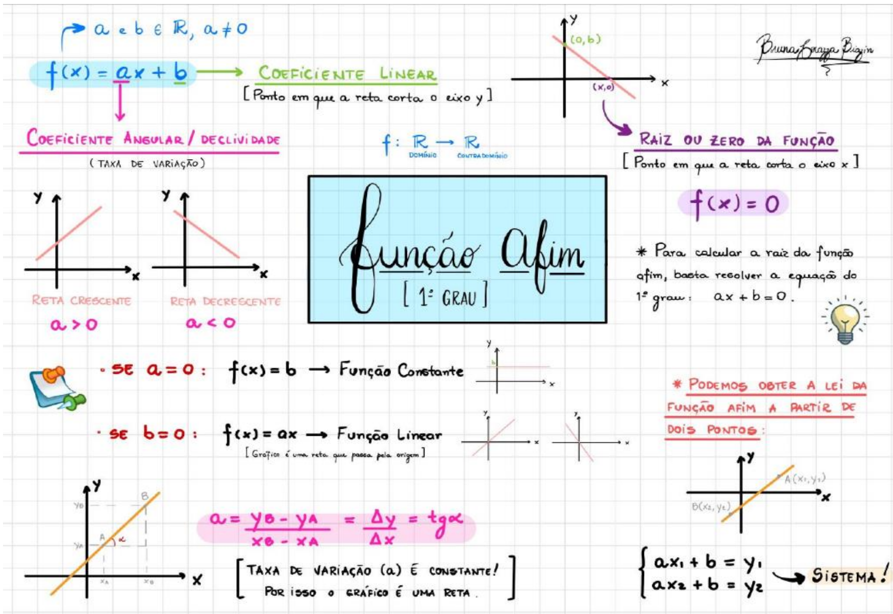
Daremos uma ideia do que está acontecendo: falaremos que, para cada vez que os números de uma das faixas é inserida, o número recebe alteração mediante certa lei de formação e transforma-se na segunda faixa: isso é uma função.

(40 minutos)

Introdução à função afim

Finalizado a atividade, distribuiremos o seguinte mapa mental para os alunos:

Figura 25: Mapa mental sobre função afim



Fonte: Maps4study.

Na sequência, escreveremos algumas questões no quadro e perguntaremos aos alunos as respostas. Faremos uma resolução conjunta. As questões são as que seguem:

1) *Quais são os coeficientes a e b?*
2) *Qual é o coeficiente angular e o coeficiente linear?*
3) *Qual a raiz da função?*
4) *Essa função é constante, linear ou afim?*
5) *Como é o gráfico dessa função?*
6) *A reta associada à função é crescente ou decrescente?*
7) *Qual a taxa de variação da função?*
8) *Qual o domínio e contradomínio da função?*
9) *É possível chegar à mesma lei de formação da função a partir de dois pontos dela? Digamos, os pontos $A(1,5)$ e $B(3,9)$?*

A cada pergunta, faremos uma breve explicação relativa ao elemento da função estudado. O objetivo é explicar os pontos do mapa mental de uma maneira interativa, considerando que trata-se de um conteúdo já visto pelos alunos.

(20 minutos)

Resolução de questões

Em seguida, trabalharemos as seguintes questões, que devem ser resolvidas pelos aunos e corrigidas em sala. As resoluções propostas estão inclusas.

1) **(ENEM Digital 2020)** Por muitos anos, o Brasil tem figurado no cenário mundial entre os maiores produtores e exportadores de soja. Entre os anos de 2010 e 2014, houve uma forte tendência de aumento da produtividade, porém, um aspecto dificultou esse avanço: o alto custo do imposto ao produtor associado ao baixo preço de venda do produto. Em média, um produtor gastava R$ 1 200,00 por hectare plantado, e vendia por R$ 50,00 cada saca de 60 kg. Ciente desses valores, um produtor pode, em certo ano, determinar uma relação do lucro L que obteve em função das sacas de 60 kg vendidas. Suponha que ele plantou 10 hectares de soja em sua propriedade, na qual colheu x sacas de 60 kg e todas as sacas foram vendidas.

   Qual é a expressão que determinou o lucro L em função de x obtido por esse produtor nesse ano?

   a) $L(x) = 50x - 1200$

   b) $L(x) = 50x - 12000$

   c) $L(x) = 50x + 12000$

   d) $L(x) = 500x - 1200$

   e) $L(x) = 1200x - 500$

   A função *lucro* é dada pela diferença entre a função ganho e função gasto.
   A função ganho, é dada por $g(x) = 50x$, pois há um ganho de R$ 50 a cada saca de 60 kg.
   A função dispesa, é dada por $d(x) = 10 \cdot 1200 = 12000$, pois há um gasto de R$ 1 200,00 por hectare plantado e tratam-se de 10 hectares.
   A função lucro, portanto, é dada por $l(x) = g(x) - d(x) \Leftrightarrow l(x) = \mathbf{50x - 12000}$

2) **(Cesgranrio)** O valor de um carro novo é de R$ 9 000,00 e, com 4 anos de uso, é de R$ 4 000,00. Supondo que o preço caia com o tempo, segundo uma linha reta, o valor de um carro com 1 ano de uso é:

   a) R$ 8 250,00

   b) R$ 8 000,00

   c) R$ 7 750,00

   d) R$ 7 500,00

   e) R$ 7 000,00

Perceba que das informações dispostas no enunciado, podemos formar um sistema linear para encontrar a função que descreve o decaimento no valor do carro. Como é dito que o preço decai seguindo uma linha reta, logo ele obedece uma função afim na forma de $f(x) = ax + b$.

Observe que temos dois pontos distintos: $(0{,}9000)$ e $(4{,}4000)$, pois um carro novo, ou seja, após 0 anos custa R$ 9 000,00 e o mesmo carro, após 4 anos, custa R$ 4 000,00.

Logo, formamos o sistema: $\begin{cases} b = 9000 \\ 4a + b = 4000 \end{cases}$, onde basta substituir b na segunda equação para encontrarmos a.

$$\Longrightarrow 4a + 9000 = 4000$$
$$\Longrightarrow 4a = -5000$$
$$\Longrightarrow a = -1250$$

Logo, a equação de decaimento no preço do carro é $f(x) = -1250x + 9000$.

Tomando $x = 1$, vem que $f(x) = -1250 + 9000 \Leftrightarrow \mathbf{7750}$

3) (ENEM 2012) As curvas de oferta e de demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações:

$Q_o = 4P - 20$

$Q_d = 46 - 2P$

Em que Q_o é quantidade de oferta, Q_d é a quantidade de demanda e P é o preço do produto.

A partir dessas equações, de oferta e de demanda, os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando QO e QD se igualam.

Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?

a) 5

b) 11

c) 13

d) 23

e) 33

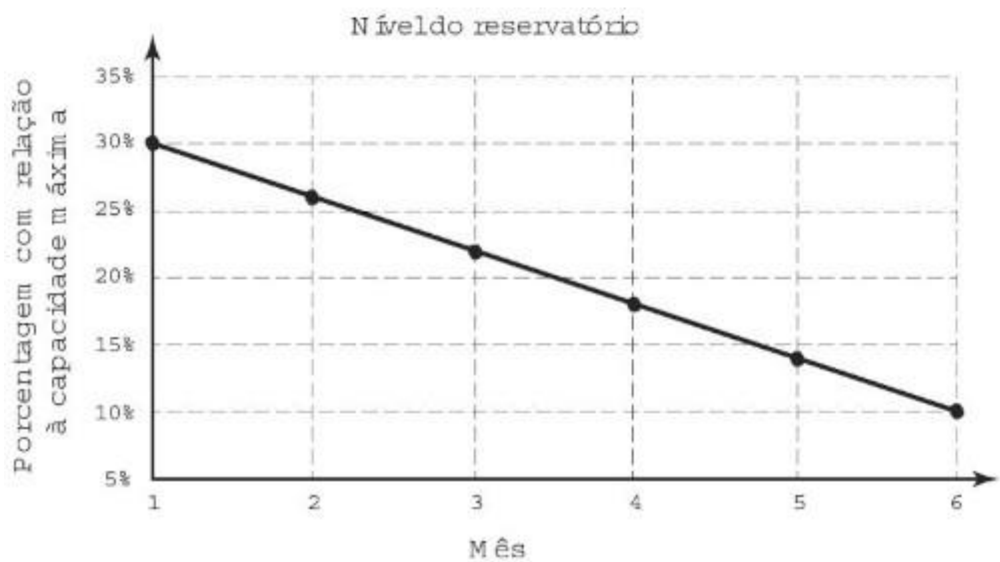
Sendo o preço de equilíbrio o valor de preço onde a oferta e demande igualam-se, então basta igualar ambas as funções (já que ambas são funções de P) e resolver para P.

$$\Longrightarrow Q_O = Q_D$$
$$\Longrightarrow 4P - 20 = 46 - 2P$$

$$\Longrightarrow 6P = 66$$
$$\Longrightarrow \boldsymbol{P = 11}$$

4) (ENEM 2016) Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.

Figura 26: Nível do reservatório em função do mês



Fonte: INEP

Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

a) 2 meses e meio

b) 3 meses e meio

c) 1 mês e meio

d) 4 meses

e) 1 mês

Temos que, o nível zero do reservatório é a raiz da função afim que define o decaimento do mesmo reservatório.
Do gráfico, podemos extrair dois pontos quaisquer para montar o sistema linear que nos dá os coeficientes a e b, tais que obedecem a lei de formação $ax + b$.

Sejam os pontos $A(0,30)$ e $B(6,10)$. Então, $\begin{cases} a + b = 30 \\ 6a + b = 10 \end{cases}$

Substituindo $b = 30 - a$ na segunda equação, vem que $6a + 30 - a = 10 \Leftrightarrow 5a = -20 \Leftrightarrow a = -4$, e logo $b = 34$.

Logo, a função que representa o decaimento no nível do reservatório em função do tempo em meses é igual a $f(x) = -4x + 34$, e sua raiz é igual a:

$$\Longrightarrow -4x + 34 = 0$$
$$\Longrightarrow -4x = -34$$
$$\Longrightarrow \boldsymbol{x = 8,5}$$

Como o exercício nos pede o tempo de zeragem *após o sexto mês,* então fazemos $8,5 - 6 = 2,5$.

Logo, o valor procurado é 2 meses e meio.

5) **(Cefet - MG - 2015)** Um motorista de táxi cobra, para cada corrida, uma taxa fixa de R$ 5,00 e mais R$ 2,00 por quilômetro rodado. O valor total arrecadado (R) num dia é função da quantidade total (x) de quilômetros percorridos e calculado por meio da função R(x) = ax + b, em que a é o preço cobrado por quilômetro e b, a soma de todas as taxas fixas recebidas no dia. Se, em um dia, o taxista realizou 10 corridas e arrecadou R$ 410,00, então a média de quilômetros rodados por corrida, foi de:

a) 12

b) 14

c) 16

d) 18

e) 20

O valor de uma corrida individual pode ser disposto em termos de uma função afim do quilômetro rodado, onde b é a taxa fixa e a é o valor cobrado por quilômetro; ou seja, $h(x) = 2x + 5$.

É dito que, num dia, o taxista arrecadou 410 reais. Vamos igualar a função lucro ao valor arrecadado, para obtermos a quantidade de quilômetros rodada no dia, ao mesmo tempo que multiplicamos o valor fixo por 10 para obtermos o valor fixo total arrecadado.

$$\Longrightarrow 2x + 50 = 410$$
$$\Longrightarrow 2x = 360$$
$$\Longrightarrow x = 180$$

Como esses 180 km foram rodados ao longo de 10 corridas e nos é pedido a média de quilômetros por corrida, logo vem que o valor procurado é $\frac{180}{10} = \mathbf{18}$

(60 minutos)

8.2 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MOURA, M. O. **A séria busca no jogo: do lúdico na matemática**. In: KISHIMOTO, T. M. (org.). Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação. São Paulo: Cortez, 199.

Função Afim. Maps4study. Disponível em: https://maps4study.com.br/enem/funcao-afim/. Acesso em: 09 out. 2023.

Exercícios Matemática – Funções Afim. Projeto Medicina. Disponível em: https://projetomedicina.com.br/site/attachments/article/398/matematica_funcoes_funcao_afim.pdf. Acesso em: 09 out. 2023.

QUINELATO, Rosangela. **Questões do Enem sobre Função Afim.** Vestibulando Web, 2021.Disponível em: https://www.vestibulandoweb.com.br/matematica/questoes-enem-funcao-afim/. Acesso em: 09 out. 2023.

DE OLIVEIRA, Raul Rodrigues. **Enem: Lista de Exercícios Sobre Equações e Funções do 1° Grau.** Brasil Escola. Disponível em: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/enem-lista-de-exercicios-sobre-equacao-e-funcao-polinomial-do-1-grau.htm. Acesso em: 09 out. 2023.

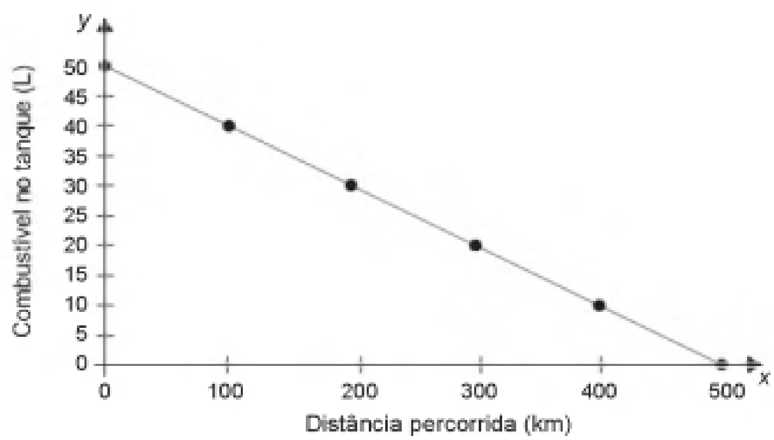
Os 8 Melhores Exercícios Sobre Função Afim Com Gabarito. Beduka, 2021.Disponível em: https://beduka.com/blog/exercicios/exercicios-sobre-funcao-afim/. Acesso em: 09 out. 2023.

8.3 MATERIAL UTILIZADO

Lista de dever de casa 5: função afim

1) **(ENEM 2018 – PPL)** Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo y (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo x (horizontal).

Figura 27: Combustível no tanque em função da distância percorrida



Fonte: INEP

A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel é:

a) $y = -10x + 500$

b) $y = \frac{-x}{10} + 50$

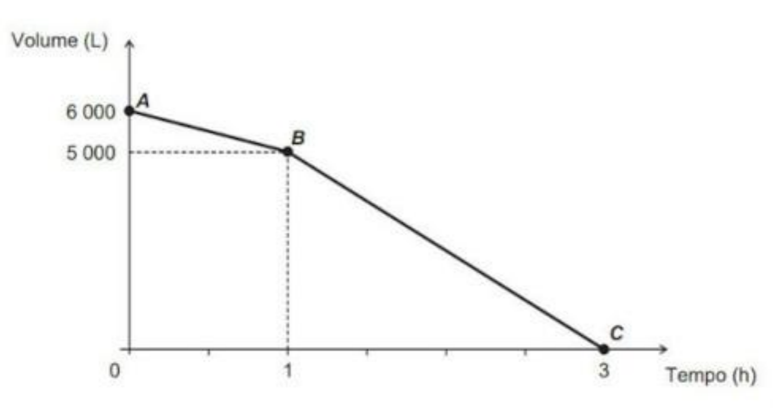
c) $y = \frac{-x}{10} + 500$

d) $y = \frac{x}{10} + 50$

e) $y = \frac{x}{10} + 500$

2) **(ENEM 2016)** Uma cisterna de 6 000 L foi esvaziada em um período de 3h. Na primeira hora foi utilizada apenas uma bomba, mas nas duas horas seguintes, a fim de reduzir o tempo de esvaziamento, outra bomba foi ligada com a primeira. O gráfico, formado por dois segmentos de reta, mostra o volume de água presente na cisterna, em função do tempo.
Qual é a vazão, em litro por hora, da bomba que foi ligada no início da segunda hora?

Figura 28: Tempo em função do volume



Fonte: INEP

a) 1 000

b) 1 250

c) 1 500

d) 2 000

e) 2 500

3) **(UFSM)** Sabe-se que o preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, que é denominada bandeirada, e uma parcela variável, que é função da distância percorrida. Se o preço da bandeirada é de R$ 4,60 e o quilômetro rodado é R$ 0,96, a distância percorrida pelo passageiro que pagou R$ 19 para ir de sua casa ao shopping é de:

a) 5 km

b) 10 km

c) 15 km

d) 20 km

e) 25 km

4) **(Unicamp – 2016)** Considere a função afim $f(x) = ax + b$ definida para todo número real x, onde a e b são números reais. Sabendo que $f(4) = 2$, podemos afirmar que $f(f(3) + f(5))$ é igual a

a) 6

b) 5

c) 4

d) 3

e) 2

5) **(Ufes)** Uma produtora pretende lançar um filme em fita de vídeo e prevê uma venda de 20.000 cópias. O custo fixo de produção do filme foi R$150.000,00 e o custo por unidade foi de R$20,00 (fita virgem, processo de copiar e embalagem). Qual o preço mínimo que deverá ser cobrado por fita, para não haver prejuízo?

a) R$ 20,00

b) R$ 22,50

c) R$ 25,00

d) R$ 27,50

e) R$ 35,00

6) **(Faap)** A taxa de inscrição num clube de natação é de R$150,00 para o curso de 12 semanas. Se uma pessoa se inscreve após o início do curso, a taxa é reduzida linearmente. Expresse a taxa de inscrição em função do número de semanas transcorridas desde o início do curso.

a) $T = 12{,}50 \cdot (12 - \mathrm{x})$

b) $T = 12{,}50x$

c) $T = 12{,}50x - 12$

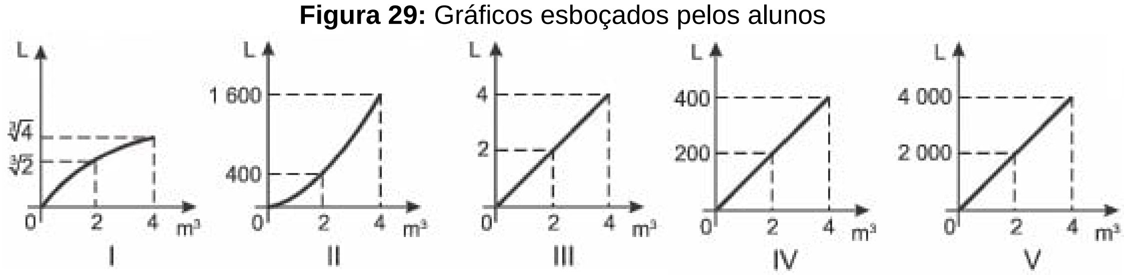
d) $T = 12{,}50 \cdot (x + 12)$

e) $T = 12{,}50x + 12$

7)

(ENEM PPL 2020) Um professor pediu aos seus alunos que esboçassem um gráfico representando a relação entre metro cúbico e litro, utilizando um software. Pediu ainda que representassem graficamente os pontos correspondentes às transformações de $0\ m^3$, $2\ m^3$ e $4\ m^3$ em litro. O professor recebeu de cinco alunos os seguintes gráficos:

Figura 29: Gráficos esboçados pelos alunos



Fonte: INEP

O gráfico que melhor representa o esboço da transformação de metro cúbico para litro é o do aluno:

a) I

b) II

c) III

d) IV

e) V

8) **(ENEM 2019)** Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R$ 1 000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um deles trabalha 2 dias por semana, recebendo R$ 80,00 por dia trabalhado.
Chamando de x a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia y, em reais, que esta empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por:

a) $y = 80x + 920$

b) $y = 80x + 1000$

c) $y = 80x + 1080$

d) $y = 160x + 840$

e) $y = 160x + 1000$

9) **(UCS 2014)** O salário mensal de um vendedor é de R$ 750,00 fixos mais 2,5% sobre o valor total em reais das vendas que ele efetuar durante o mês. Em um mês em que suas vendas totalizarem x reais, o salário do vendedor será dado pela expressão:

a) $\mathrm{y} = 750 + 2{,}5\mathrm{x}$

b) $\mathrm{y} = 750 + 0{,}25\mathrm{x}$

c) $\mathrm{y} = 750{,}25\mathrm{x}$

d) $\mathrm{y} = 750 \cdot (0{,}25\mathrm{x})$

e) $\mathrm{y} = 750 + 0{,}025\mathrm{x}$

10) **(ENEM 2011)** O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R$ 100 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 350 000,00, enquanto a segunda cobrou R$ 120 000,00 por km construído (n) acrescido de um valor fixo de R$ 150 000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada.
Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

a) $100n + 350 = 120n + 150$

b) $100n + 150 = 120n + 350$

c) $100n \cdot (n + 350) = 120n \cdot (n + 150)$

d) $100n \cdot (n + 350000) = 120n \cdot (n + 150000)$

e) $350 \cdot (n + 100000) = 150 \cdot (n + 120000)$

11) **(Uel)** Uma turma de torcedores de um time de futebol quer encomendar camisetas com o emblema do time para a torcida. Contataram com um fabricante que deu o

seguinte orçamento: - Arte final mais serigrafia: R$ 90,00, independente do número de camisetas. - Camiseta costurada, fio 30, de algodão: R$ 6,50 por camiseta. Quantas camisetas devem ser encomendadas com o fabricante para que o custo por camiseta seja de R$ 7,00?

a) 18

b) 36

c) 60

d) 180

e) 200

12) Uma fábrica de panelas opera com um custo fixo mensal de R$ 9 800,00 e um custo variável por panela de R$ 45,00. Cada panela é vendida por R$ 65,00. Seja x a quantidade que deve ser produzida e vendida mensalmente para que o lucro mensal seja igual a 20% da receita.
A soma dos algarismos de x é:

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

Resolução da lista de dever de casas 5

1. Veja que temos dois pontos muito notáveis no gráfico: $A(0{,}50)$ e $B(500{,}0)$. Tão logo, possuindo dois pontos do gráfico, podemos montar o sistema linear que nos indica a lei de formação da função:
$\begin{cases} b = 50 & (i) \\ 500a + b = 0 & (ii) \end{cases}$ da onde, resolvendo para a em (ii), temos que $500a + 50 = 0 \Leftrightarrow$ $10a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{10}$.
Dessa maneira, a expressão de algébrica procurada é $\boldsymbol{y = -\frac{x}{10} + 50.}$

2. Observando o gráfico associado à primeira bomba, vemos que houve uma redução de $1000\ L$ dentro de uma hora. Logo, o vazão dessa bomba é de $1000\ L/h$.
Após a segunda bomba ser ligada, veja que o vazão foi de $5000\ L$ dentro de $2h$; ou seja, um total de $\frac{5000}{2} = 2500\ L/h$.
Subtraindo o vazão da bomba anterior, restará apenas o vazão da segunda bomba. Ou seja, $2500\ L/h\ - 1000\ L/h = \boldsymbol{1500\ L/h.}$

3. A bandeirada trata-se de uma parcela fixa, que estará inclusa em qualquer corrida contanto que ela ocorra. Logo, o valor da bandeirada possui a mesma função do coeficiente b na função afim.
Simultaneamente, chamando de x o quilômetro rodado, sabemos que cobra-se R$ 0,96 por quilômetro rodado; ou seja, $0{,}96x$.
Juntando ambas as informações, temos que o valor total cobrado por corrida é bandeirada + R$ 0,96 por quilômetro rodado; ou seja, $L(x) = 0{,}96x + 4{,}60$
Se o passageiro pagou R$ 19,00 pela corrida, então ele percorreu:

$$0{,}96x + 4{,}60 = 19 \Leftrightarrow 0{,}96x = 0{,}96x = 14{,}4 \Leftrightarrow x = \frac{14{,}4}{0{,}96} \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 15}$$

4. Se $f(4) = 2$, então em $ax + b = y$, temos que $4a + b = 2$.
Simultaneamente, em $f(f(3) + f(5))$, isto é o mesmo que aplicarmos $x = 3$ e $x = 5$ na função. Ou seja: $f\big(f(3) + f(5)\big) = f(3a + b + 5a + b) = f(8a + 2b) = f(2 \cdot (4a + b))$
Mas sabemos que $4a + b = 2$. Ou seja: $\boldsymbol{f\big(2 \cdot (4a + b)\big) = f(2 \cdot 2) = f(4) = 2}$

5. Se o custo fixo de produção foi de R$ 150.000,00, e o custo por cópia é de R$ 20,00 e são 20.000 cópias, logo, o custo total de produção foi de $C(x) = 20x + 150000 \Leftrightarrow$
$C(20000) = (20) \cdot (20000) + 150000 \Leftrightarrow C(20000) = 400000 + 150000 \Leftrightarrow$
$C(20000) = 550000$
Para que não haja prejuízo, o preço unitário de venda y das fitas deve *no mínino* cobrir os custos de produção, que são de R$ 550.000,00. Logo,

$$y = \frac{550000}{20000} = \boldsymbol{27{,}5}$$

6. Se a taxa de inscrição é de R$ 150,00 e a duração do curso é de 12 meses, então o valor do curso como razão da duração é igual a $\frac{150}{12} = 12{,}5$. Se multiplicarmos $12{,}5$ por 12, a duração do curso, obviamente vamos obter o valor integral do curso, 150, e esta é a situação dos alunos que assinaram o curso desde o começo.
Veja que os alunos podem inscrever-se no curso de 0 até 11 meses, onde 0 representa a situação dos alunos que inscreveram-se no começo e 11 a situação dos alunos que inscreveram-se um mês antes. Logo, inscrevem-se em $12 - x$ meses, $x \in [0{,}11]$
Tão logo, o valor do curso em proporção ao mês de inscrição é dado pelo produto da razão do valor pela duração, pelo mês de inscrição, ou $\boldsymbol{T = 12{,}5 \cdot (12 - x)}$

7. Veja que definiu-se o metro cúbico no eixo x e o litro no eixo y.
Simultaneamente, sabemos que $1\ m^3 = 1000\ L$.
Logo, para os pontos especificados, temos que:

- $0\ m^3 = 0\ L$
- $2\ m^3 = 2000\ L$
- $4\ m^3 = 4000\ L$

Logo, **o gráfico que melhor descreve a conversão é o V.**

8. Estamos atrás de uma função de custo, que nos indique o custo semanal para manter o quadro de funcionários da empresa. Sabemos o preço para manter o gerente e os funcionários, portanto faremos uma função de custo em função dos funcionários.
Sabemos que existe apenas um gerente, cujo custo semanal resume-se a R$ 1000,00. Os demais funcionários trabalham duas vezes por semana, a uma diária de R$ 80,00; logo, o custo para manter os funcionários, se a quantidade de funcionários é desconhecida, é $(2) \cdot (80)x = 160x$. A função procurada é o custo dos funcionários somado ao custo do gerente. Logo, $\boldsymbol{y = 160x + 1000}$

9. O salário do vendedor é composto de um valor fixo de R$ 750,00 independente do valor mensal de venda, adicionado de 2,5% das vendas mensais: ou seja, chamando de x as vendas mensais, o adicional é de $\frac{2{,}5}{100}x = 0{,}025x$.
Logo, a função procurada é $\boldsymbol{y = 750 + 0{,}025}$

10. Primeiramente, é necessário descobrir a função que descreve o valor cobrado por ambas as empresas. A primeira empresa cobra R$ 100.000,00 por quilômetro e um valor fixo de R$ 350.000,00, ou seja, $A(n) = 100000n + 350000$. Já a segunda cobra R$ 120.000,00 por quilômetro e um valor fixo de R$ 150.000,00, ou seja, $B(n) = 120000n + 150000$.
Para descobrir o valor n de quilômetro que torna indiferente a escolha, precisamos igualar ambas as funções.

$$\Longrightarrow A(n) = B(n)$$
$$\Longrightarrow 100000n + 350000 = 120000n + 150000$$
$$\Longrightarrow 100 \cdot (100n + 350) = 100 \cdot (120n + 150)$$
$$\Longrightarrow \boldsymbol{100n + 350 = 120n + 150}$$

11. Seja x o número de camisetas.
Desejamos encontrar o valor x de camisetas, que gerará um custo de R$ 7,00 de produção (ou seja, $7x$), contemplando um custo fixo de R$ 90,00 e um custo variável por unidade de R$ 6,50 (ou seja, $6{,}5x$).
Logo, é preciso que $7x = 6{,}5x + 90 \Leftrightarrow 0{,}5x = 90 \Leftrightarrow x = \frac{90}{0{,}5} \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 180}$

12. A função procurada é a *função lucro*, dada por $L(x) = R(x) - D(x)$, onde $R(x)$ é a função receita e $D(x)$ é a função despesa. Ou seja, o lucro é a receita *menos* as despesas.
A receita é $R(x) = 65x$, pois vende-se cada x unidades de panela por R$ 65,00.
A despesa é $D(x) = 45x + 9800$, pois há um valor fixo de R$ 9.800,00 e um valor de produção de R$ 45,00 associado a cada x unidades de panela.
Logo, o lucro é $L(x) = 65x - (45x + 9800) = 65x - 45x - 9800 = 20x - 9800$.
Desejamos que o lucro seja igual a 20% da receita; logo, $L(x) = \frac{20}{100}R(x) \Leftrightarrow L(x) = \frac{1}{5}R(x)$.
Substituindo, vem que:

$$20x - 9800 = \frac{1}{5}(65x)$$
$$(5) \cdot (20x) - (5) \cdot (9800) = (5) \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \cdot (65x)$$
$$100x - 49000 = 65x$$
$$35x = 49000$$
$$x = \frac{49000}{65}$$
$$x = 1400$$

Logo, a soma dos algarismos de x é igual a $\mathbf{1 + 4 + 0 + 0 = 5}$

8.4 RELATÓRIO DA AULA V

No sábado dia 14 de outubro de 2023, às 8 horas da manhã, ocorreu o quinto encontro do PROMAT (Programa de Matemática) na Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE. Este encontro teve como foco o ensino da matemática básica para o ENEM e vestibular, direcionado para alunos do ensino médio ou aqueles que planejam prestar essas provas. O encontro foi conduzido pelos estagiários Luiza Stunder, Marcio Miranda, Raianny Vitoria Zerneh e Theo da Luz, com a participação de 16 alunos em nossa sala.

No início do encontro, os alunos foram divididos em duplas e a aula foi iniciada com a resolução da atividade 12 da lista proposta como exercícios domiciliares. Durante o tempo dado para a resolução da atividade, vários alunos demostraram dificuldades em compreender como calcular a área de um quadrilátero não regular, porém com a ajuda dos acadêmicos e dos outros alunos foi possível sanar as dúvidas e dificuldades dos alunos com maiores dificuldades e após isso foi realizada a resolução no quadro, com a participação dos alunos. Vale ressaltar que essa atividade tomou mais tempo planejado.

Em seguida foi feito um jogo, para que os alunos relacionassem conjuntos numéricos e suas leis de formação. Os alunos apresentaram uma pequena dificuldade para relacionarem alguns conjuntos, porém com pequenas dicas e ideias de métodos de resolução, foi possível eles encontrarem as relações, embora não todas elas.

Na segunda parte da aula, foi apresentada as relações dos conjuntos, a qual contou com a participação dos alunos. A aula prosseguiu, com a explicação do mapa mental, sobre funções afim, feita pelo Theo, seguido por perguntas que tinha como objetivo, ajudar os alunos a terem uma maior compreensão do conteúdo.

Logo após isso foi entregue uma lista de atividades para os alunos, a fim de uma maior fixação do conteúdo e ajudar os alunos com qualquer dúvida ou dificuldade que poderiam aparecer durante a resolução dos exercícios. Após isso o encontro foi finalizado.

9. ENCONTRO VI

9.1 PLANO DE AULA - ENCONTRO VI

Público-alvo: Alunos de todos os anos do Ensino Médio da rede pública estadual do Paraná.

Estagiários: Luiza Stunder, Márcio Vinícius Rocha Miranda, Raianny Vitória Zerneh, Theo Fernando Bonfim da Luz.

Conteúdos: Função quadrática.

Objetivo geral: Relembrar os conceitos anteriormente listados e utilizá-los para resolver questões de nível ENEM e vestibulares em geral.

Objetivos específicos:

- Reconhecer a função quadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$ e identificar seus coeficientes a, b, c;
- Esboçar o gráfico de uma função quadrática;
- Identificar e determinar o vértice da função;
- Compreender o que é a raiz da função quadrática e o que significa geometricamente (a parábola toca o eixo x em dois pontos);
- Compreender o estudo de sinal do delta aplicado ao gráfico da função;
- Capacitar os alunos a identificar problemas e trabalhar em resoluções envolvendo função quadráticas.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 3h e 20 minutos.

Recursos didáticos: Quadro, giz, atividades impressas, lápis, borracha, caderno.

ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO

Retomada da aula anterior

Iniciaremos a aula relembrando brevemente o conteúdo da aula anterior, com o jogo bingo das funções.

Regras do Jogo

- Os alunos terão em mãos uma das cartelas disponíveis, com uma função escrita;
- Sortearemos, de forma aleatória, um número que estará em uma caixa;
- O número será anunciado aos alunos;
- Os alunos deverão substituir o número anunciado na variável da função que se encontra na cartela;
- O resultado será o número que eles irão marcar;
- O vencedor será o aluno que completar a cartela corretamente primeiro;
- Uma vez completada a cartela, o aluno deverá gritar a palavra ‘FUNÇÃO’ ao invés de bingo para que ganhe o jogo;
- Os alunos poderão interagir entre si e com os estagiários durante a execução da atividade.

Durante a dinâmica, dois estagiários sortearão os números e dois circularão pela sala auxiliando e tirando possíveis dúvidas dos alunos.

As tabelas do bingo são as que seguem nas próximas páginas:

(50 minutos)

$f(x) = x + 5$

51	48	59	17
21	29	54	57
31	10	30	26

Função: $f(x) = 2x - 3$

37	61	33	17
67	51	5	1
15	107	85	73

$f(x) = 3x + 1$

67	40	100	43
145	178	91	46
94	109	4	70

$f(x) = 4x - 2$

198	178	66	162
30	238	22	226
222	186	134	10

$f(x) = 5x + 2$

107	102	212	47
187	287	67	227
197	52	302	177

$f(x) = 6x + 3$

117	201	9	219
33	309	183	303
105	51	171	21

$f(x) = 7x - 1$

188	160	265	237
363	412	321	13
181	202	174	223

$f(x) = 8x + 4$

436	348	148	92
36	100	396	180
452	132	388	444

$f(x) = x + 2$

9	49	8	46
17	26	33	43
55	16	42	60

$f(x) = 2x + 2$

22	66	40	38
18	20	92	42
32	114	120	108

$f(x) = 3x -4$

161	167	77	125
8	89	176	143
65	128	146	44

$f(x) = 4x + 2$

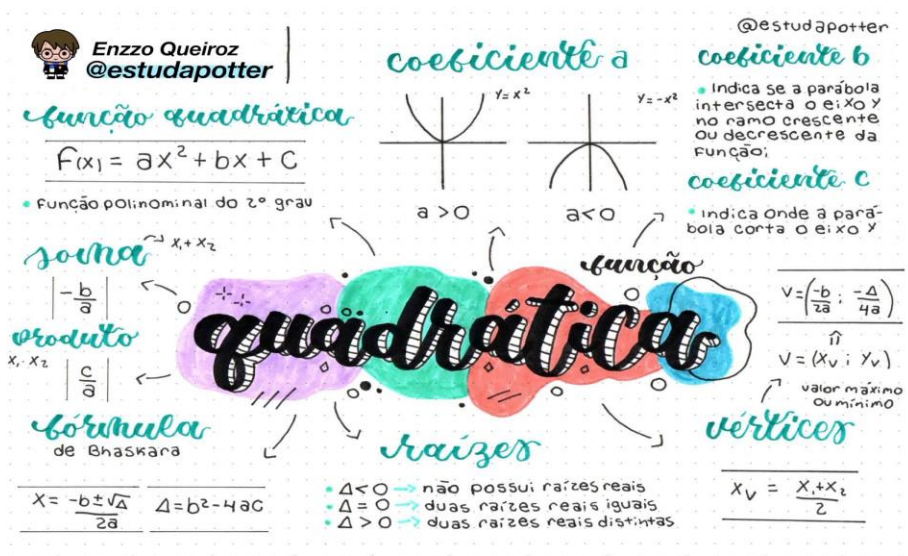
218	70	122	118
146	102	22	46
138	106	98	54

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45
46	47	48	49	50
51	52	53	54	55
56	57	58	59	60

Introdução à função de 2° grau

Finalizando o jogo, será entregue o seguinte mapa mental

Figura 30: Mapa mental de função quadrática



Fonte: Study Augusto

O mapa mental será dividido e explicado em partes para os alunos.

I. FORMA GENÉRICA, DOMÍNIO E IMAGEM

Iniciaremos fazendo uma alusão à explicação dada em função afim, dizendo que a função quadrática é similar à equação quadrática, no sentido de que ambas têm a mesma forma padrão, com os coeficientes a, b e c, que acompanham os termos x^2, x e termo independente. No entanto, enquanto na equação quadrática nós queremos descobrir as raízes, ou seja, os valores que igualam a expressão a 0, na função quadrática nós estamos aplicando os valores do domínio em x, para receber correspondências em $f(x)$.

Então, vamos relembrar o conceito primordial de função, de domínio e imagem. Pediremos para que os alunos nos digam o que é domínio e imagem. Após ouvir as respostas, daremos a definição de ambos, dizendo que domínio trata-se do conjunto de números donde pegamos os valores de x, e contradomínio os valores de $f(x)$ donde obtemos correspondências para os valores de x. Pediremos aos alunos, qual é o domínio e contradomínio da função $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Por fim, falaremos que função trata-se de uma correspondência única, entre um valor de x do domínio que liga-se a um valor $f(x)$

do contradomínio, sendo que essa correspondência existe para todos os valores do domínio e obedece a natureza quadrática da função.

Para exemplificar, usaremos a função $f(x) = x^2 - 3x + 2$, dizendo que $f(x)$ é o nosso y, e mostrar que quando fazemos $x^2 - 3x + 2 = 0$ temos uma equação para resolver em x, e enquanto fazemos $f(x) = x^2 - 3x + 2$ inserindo valores de x, estamos descobrindo valores de y. Pediremos para que os alunos nos digam valores de x para que façamos alguns pares ordenados, deixando-os escritos no quadro.

II. RAÍZES

Explicaremos o processo de obtenção das raízes, que é idêntico ao já estudado em equação de segundo grau, utilizando ou fórmula de Bháskara, ou soma e produto. Diremos que, ao obter raízes para a função, estamos considerando os valores de x para $f(x) = 0$, ou seja, os pares ordenados na forma $\left(x_{1,}0\right)$ e $(x_2, 0)$.

Pediremos para que os alunos calculem as raízes da função $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Faremos o cálculo também no quadro.

Relembraremos do estudo do discriminante, tema já abordado em equações quadráticas.

III. GRÁFICO, COEFICIENTES E CONCAVIDADE

Explicaremos que o gráfico da função quadrática é uma parábola. Para exemplificar, faremos o gráfico da função $f(x) = x^2 - 3x + 2$ utilizando os pontos anteriormente descritos pelos alunos.

Feito o gráfico, demonstraremos alguns comportamentos da função. Mostraremos que, as raízes são os pontos no eixo x onde a parábola toca, a concavidade é a orientação da parábola (para cima, para baixo) e depende do sinal de a (para cima se $a > 0$, para baixo se $a < 0$). O coeficiente b determina se a parábola é positiva ou negativa após o gráfico tocar o eixo y, e o coeficiente c determina o ponto no eixo y tocado pelo gráfico.

Utilizando o gráfico da função, traçaremos uma reta perpendicular ao eixo x passando pelo seu vértice. Perguntaremos aos alunos se eles não notam alguma pecularidade ao fazermos isso; o objetivo é fazê-los notar o espelhamento da função em relação à reta perpendicular que passa pelo vértice, bem como o ponto de vértice. Explicaremos que o espelhamento deve-se ao grau da função, por tratar-se de uma função de exponente 2, todo ponto da imagem é atingido duas vezes Também que o vértice trata-se do ponto do gráfico onde a imagem está relacionada a apenas um valor do domínio. Esse ponto é chamado de vértice da função. Perguntaremos o que os alunos podem dizer a respeito desse ponto. Explicaremos que, quando $a > 0$, como é o caso, o vértice é o *ponto mínimo* do da função e quando $a < 0$, o vértice é o *ponto máximo* da função. Explicaremos o cálculo da coordenada x do vértice e o porquê é feito dessa maneira (ponto médio das raízes). O cálculo é o que segue:

$$\Longrightarrow V_X = \frac{1+2}{2}$$

$$\Longrightarrow V_X = \frac{3}{2}$$

$$\Longrightarrow V_X = 1{,}5$$

E para descobrir a coordenada y, basta aplicar $x = V_x$:

$$\Longrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) + 2$$

$$\Longrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2$$

$$\Longrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{8}{4}$$

$$\Longrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9 - 18 + 8}{4}$$

$$\Longrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-1}{4}$$

$$\Longrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = -0{,}25$$

A seguir, perguntaremos aos alunos se eles não conseguem pensar em uma forma genérica de denotar as coordenadas do vértice, sabendo que as obtemos através do ponto médio entre as raízes, e da aplicação desse ponto médio na função.

Após ouvir suas respostas, prosseguiremos com os cálculos:

$$\Longrightarrow V_x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\Longrightarrow V_x = \frac{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}{2}$$

$$\Longrightarrow V_x = \frac{\frac{-2b}{2a}}{2}$$

$$\Longrightarrow V_x = \frac{\frac{-b}{a}}{2}$$

$$\Longrightarrow V_x = \frac{-b}{2a}$$

O cálculo da coordenada y é obtido ao aplicar $x = V_x$:

$$\Longrightarrow f\left(\frac{-b}{2a}\right) = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c$$

$$\Longrightarrow f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a} + \frac{-b^2}{2a} + c$$

$$\Longrightarrow f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a} + \frac{-2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

$$\Longrightarrow f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

$$\Longrightarrow f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

$$\Longrightarrow f\left(\frac{-b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\Longrightarrow f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$$

(30 minutos)

Exercícios

Os seguintes exercícios serão resolvidos pelos alunos e resolvidos ainda em sala:

1) **(ENEM 2021)** Em um ano, uma prefeitura apresentou o relatório de gastos públicos realizados pelo município. O documento mostra que foram gastos 72 mil reais no mês de janeiro (mês 1), que o maior gasto mensal ocorreu no mês de agosto (mês 8) e que a prefeitura gastou 105 mil reais no mês de dezembro (mês 12). A curva que modela esses gastos é a parábola $y = T(x)$, com x sendo o número correspondente ao mês e $T(x)$, em milhar de real. A expressão da função cujo gráfico é o da parábola descrita é:

a) $T(x) = -x^2 + 16x + 57$

b) $T(x) = -\frac{11}{16}x^2 + 11x + 72$

c) $T(x) = \frac{3}{5}x^2 + \frac{24}{5}x + \frac{381}{5}$

d) $T(x) = -x^2 - 16x + 87$

e) $T(x) = \frac{11}{6}x^2 - \frac{11}{2}x + 72$

Podemos montar um sistema de equações. Veja que o exercício nos fornece os pontos $A(1,72)$ e $B(12,105)$; ou seja,

$$\begin{cases} a(1)^2 + b(1) + c = 72 \\ a(12)^2 + b(12) + c = 105 \\ \dfrac{-b}{2a} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 72 \\ 144a + 12b + c = 105 \\ \dfrac{-b}{2a} = 8 \end{cases}$$

Fazemos $\frac{-b}{2a} = 8 \Leftrightarrow -b = 16a \Leftrightarrow b = -16a$ e aplicamos esse valor de b em ambas as equações. Dessa maneira, vem que:

$$\begin{cases} a + b + c = 72 \\ 144a + 12b + c = 105 \\ \dfrac{-b}{2a} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -16a \\ a - 16a + c = 72 \\ 144a + 12(-16a) + c = 105 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -16a \\ -15a + c = 72 \\ 144a - 192a + c = 105 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -16a \\ -15a + c = 72 \\ -48a + c = 105 \end{cases}$$

Tomando $-15a + c = 72$ como $15a - c = -72$ e somando à outra equação, termo a termo, vem que:

$$-33a = 33 \Leftrightarrow a = -1$$

Dessa maneira, substituindo em $b = -16a$, vem que $b = 16$ e substituindo em $a + b + c = 72$, tão logo $-1 + 16 + c = 72 \Leftrightarrow c = 57$.
Assim, o gráfico que descreve a parábola é igual a $T(x) = -x^2 + 16x + 57$

2) **(ENEM 2021)** Uma empresa de chocolates consultou o gerente de produção e verificou que existem cinco tipos diferentes de barras de chocolate que podem ser produzidas, com os seguintes preços no mercado:

- Barra I: R$ 2,00;
- Barra II: R$ 3,50;
- Barra III: R$ 4,00;
- Barra IV: R$ 7,00;
- Barra V: R$ 8,00.

Analisando as tendências do mercado, que incluem a quantidade vendida e a procura pelos consumidores, o gerente de vendas da empresa verificou que o lucro L com a venda de barras de chocolate é expresso pela função $L(x) = -x^2 + 14x - 45$ em que x representa o preço da barra de chocolate. A empresa decide investir na fabricação da barra de chocolate cujo preço praticado no mercado renderá o maior lucro.

Nessas condições, a empresa deverá investir na produção da barra:

a) I

b) II

c) III

d) IV

e) V

Já que x representa o valor de venda da barra de chocolate e $f(x)$o preço obtido pela venda, logo, o valor de x que obtém o valor máximo de $f(x)$ é o vértice ponto máximo da função.

Calculamos o vértice da função por $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$. Logo:

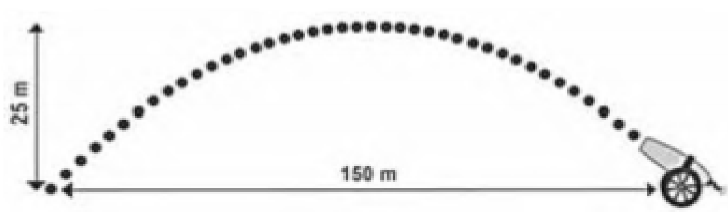
$$V_x = \frac{-14}{2 \cdot (-1)} = \frac{-14}{-2} = 7$$

$$V_y = -\frac{14^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-45)}{4 \cdot (-1)} \Leftrightarrow -\frac{196 - 180}{-4} \Leftrightarrow -\frac{16}{-4} \Leftrightarrow 4$$

Portanto, a barra que maximiza o lucro da empresa é a barra de valor R$ 7,00, cujo lucro é de 4.

3) (ENEM 2018) Um projétil é lançado por um canhão e atinge o solo a uma distância de 150 metros do ponto de partida. Ele percorre uma trajetória parabólica, e a altura máxima que atinge em relação ao solo é de 25 metros.

Figura 31: Trajetória do projétil



Fonte: INEP

Admita um sistema de coordenadas xy em que no eixo vertical y está representada a altura e no eixo horizontal x está representada a distância, ambas em metro. Considere que o canhão está no ponto (150; 0) e que o projétil atinge o solo no ponto (0; 0) do plano xy.

A equação da parábola que representa a trajetória descrita pelo projétil é

a) $y = 150x - x^2$

b) $y = 3750x - 25x^2$

c) $75y = 300x - 2x^2$

d) $125y = 450x - 3x^2$

e) $225y = 150x - x^2$

Podemos montar um sistema similar ao da primeira questão.
Veja que temos dois pontos: $A(150{,}0)$ e $B(0{,}0)$, e temos a altura máxima $y = 25$; ou seja, $\frac{-\Delta}{4a} = 25$. Ou seja:

$$\begin{cases} a(150)^2 + b(150) + c = 0 \\ a(0)^2 + b(0) + c = 0 \\ \dfrac{-\Delta}{4a} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 22500a + 150b + c = 0 \\ c = 0 \\ \dfrac{-\Delta}{4a} = 25 \end{cases}$$

Fazendo:

$$\frac{-\Delta}{4a} = 25 \Leftrightarrow -\Delta = 100a \Leftrightarrow -b^2 + 4ac = 100a \Leftrightarrow -b^2 = 100a \Leftrightarrow b^2 = -100a$$

Substituindo os valores de a, c na primeira equação, temos:
$22500a + 150b + c = 0 \Leftrightarrow -225(-100a) + 150b = 0 \Leftrightarrow -225b^2 + 150b = 0 \Leftrightarrow b(-225b + 150) = 0$, ou seja, $b = \frac{150}{225}$.

Substituindo, vem que $b^2 = -100a \Leftrightarrow \left(\frac{150}{225}\right)^2 == 100a \Leftrightarrow \frac{22500}{50625} = -100a \Leftrightarrow -\frac{225}{50625} = a \Longrightarrow -\frac{25}{5625} = a \Leftrightarrow -\frac{1}{225} = a$

Sabendo os valores dos coeficientes, então $y = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow y = -\frac{1}{225}x^2 + \frac{150}{225}x \Leftrightarrow 225y = -x^2 + 150x \Leftrightarrow y = 150x - x^2$

4) **(ENEM 2015)** Um meio de transporte coletivo que vem ganhando espaço no Brasil é a van, pois realiza, com relativo conforto e preço acessível, quase todos os tipos de transportes: escolar e urbano, intermunicipal e excursões em geral.

O dono de uma van, cuja capacidade máxima é de 15 passageiros, cobra para uma excursão até a capital de seu estado R$ 60,00 de cada passageiro. Se não atingir a capacidade máxima da van, cada passageiro pagará mais R$ 2,00 por lugar vago.

Sendo x o número de lugares vagos, a expressão que representa o valor arrecadado V(x), em reais, pelo dono da van, para uma viagem até a capital é:

a) $V(x) = 902x$

b) $V(x) = 930x$

c) $V(x) = 900 + 30x$

d) $V(x) = 60x + 2x^2$

e) $V(x) = 900 - 30x - 2x^2$

Uma vez que cobra-se R$ 60,00 pela excursão, por passageiro, e x denota a quantidade de lugares vagos, logo, a quantidade cobrada por lugar, por passageiro, é $60(15 - x)$
Como cobra-se também por R$ 2,00, então temos $(15 - x)2x$.
Logo, o lucro é denotado por $V(x) = 60(15 - x) + (15 - x)2x$

$$V(x) = 900 - 60x + 30x - 2x^2$$
$$V(x) = 900 - 30x - 2x^2$$

5) (FAAP – SP adaptada) Uma indústria produz, por dia, x unidades de determinado produto, e pode vender tudo o que produzir a um preço de R$ 100,00 a unidade. Se x unidades são pro duzidas a cada dia, o custo total, em reais, da produção diária é igual a $x^2 + 20x + 700$. Portanto, para que a indústria tenha lucro diário de R$ 900,00, qual deve ser o número de unidades produzidas e vendidas por dia?

a) 20

b) 25

c) 30

d) 40

e) 50

A questão nos pede a função lucro, que é dada por receita – despesa.
A despesa é $D(x) = x^2 + 20x + 700$.
Segundo o exercício, a receita é $R(x) = 100x$.
Logo,

$$L(x) = D(x) - R(x)$$
$$L(x) = 100x - (x^2 + 20x + 700)$$
$$L(x) = -x^2 + 80x - 700$$

Desejamos saber a quantidade a ser vendida para obter $y = 900$.

$$-x^2 + 80x - 700 = 900$$

$$-x^2 + 80x - 1600 = 0$$
$$(-x - 40)(x + 40) = 0$$

Logo, $x = 40$.

(60 minutos)

Encerraremos o encontro com o seguinte jogo: **dorminhoco da função quadrática**

Regras do jogo

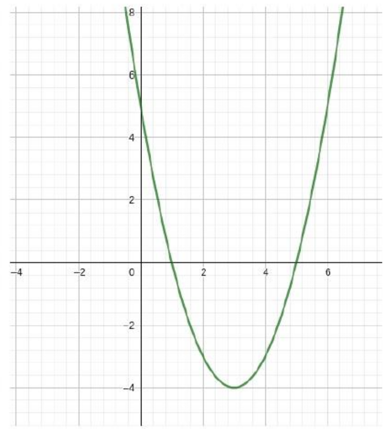
- É uma adaptação do jogo dorminhoco de baralho de cartas;
- O jogo é composto de 41 cartas, sendo: 10 cartas com gráfico da função quadrática; 10 cartas com o vértice da parábola; 10 cartas com as raízes da função; 10 cartas com a lei de formação da função; 1 carta denominada “dorminhoco”, que atua como mico/penalidade;
- Joga-se em grupos de 4 até 10 alunos;
- O jogo é iniciado com a divisão de grupos, distribuindo-se as cartas em quantidades pares;
- Cada aluno inicia com 4 cartas, com exceção de 1 aluno, que começará com 5. Esse aluno escolherá uma carta para passar ao aluno de sua direita;
- Deve-se sempre manter 4 cartas em mão, nem mais, nem menos;
- Quem pegar a carta dorminhoco, deve mantê-la em mãos por 1 turno;
- O objetivo é fechar um conjunto com as cartas de aspectos associados à mesma função quadrática: mesmo gráfico, mesmo vértice, mesmas raízes, mesma lei de formação.
- Quem fechar o conjunto por primeiro, deve sutilmente abaixar suas cartas na mesa, sem comunicar, e fingir que ainda está no jogo, até que cada um dos restantes dos jogadores perceba e também abaixe suas cartas. O dorminhoco é o último aluno que perceber e abaixar as cartas.

O jogo de cartas, separado pelo seus respectivos conjuntos, é o que segue:

(restante da aula, 60 minutos)

$f(x)=x^2-6x+5$

Bárbara Fabriz
PROFESSORA



Bárbara Fabriz
PROFESSORA

$x' = 1$

$x'' = 5$

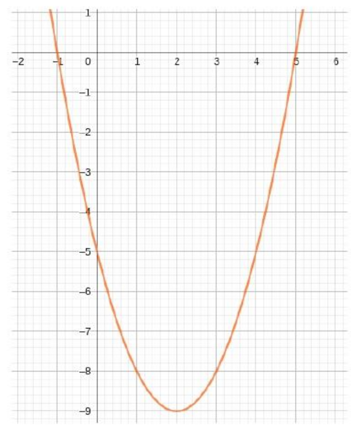
Bárbara Fabriz
PROFESSORA

V (3, -4)

Bárbara Fabriz
PROFESSORA

$g(x)=x^2-4x-5$

Bárbara Fabriz
PROFESSORA



Bárbara Fabriz
PROFESSORA

$x' = -1$

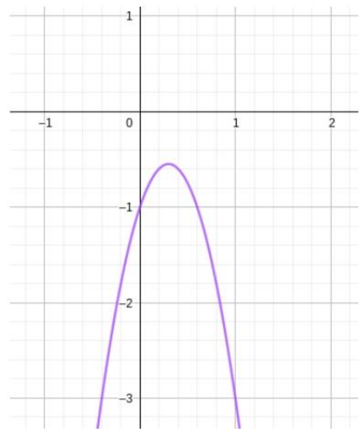
$x'' = 5$

Bárbara Fabriz
PROFESSORA

V (2, -9)

Bárbara Fabriz
PROFESSORA

$h(x)=-5x^2+3x-1$



Bárbara Fabriz
PROFESSORA

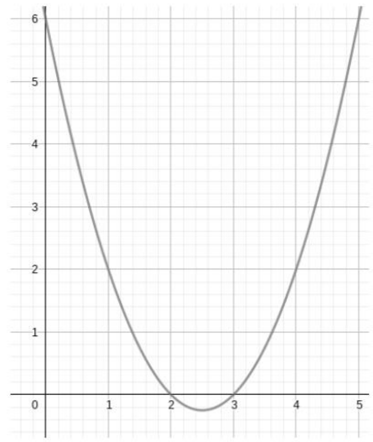
Não existem raízes reais

Bárbara Fabriz
PROFESSORA

V (3/10, -11/20)

Bárbara Fabriz
PROFESSORA

$p(x)=x^2-5x+6$



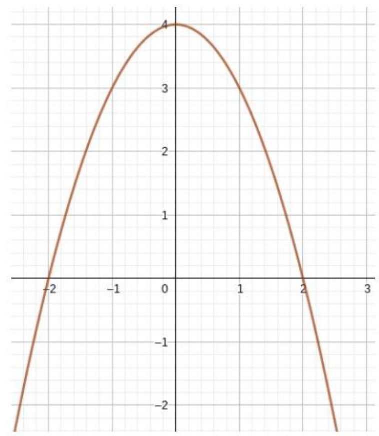
$x' = 2$

$x'' = 3$

$V\ (5/2, -1/4)$

$q(x) = -x^2 + 4$

Bárbara Fabriz
PROFESSORA



Bárbara Fabriz
PROFESSORA

$x' = -2$

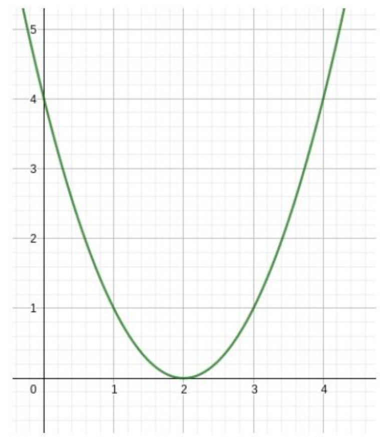
$x'' = +2$

Bárbara Fabriz
PROFESSORA

$V\ (0,\ 4)$

Bárbara Fabriz
PROFESSORA

$r(x)=x^2-4x+4$



Bárbara Fabriz
PROFESSORA

$x' = x'' = 2$

Bárbara Fabriz
PROFESSORA

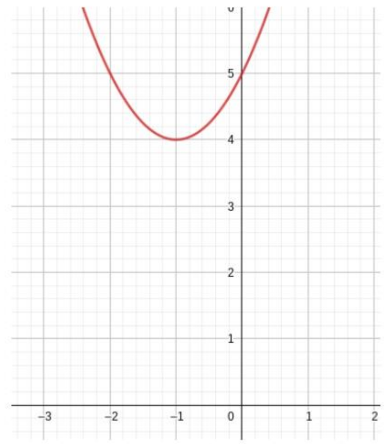
$V\ (2,\ 0)$

Bárbara Fabriz
PROFESSORA

151

$s(x)=x^2+2x+5$

Bárbara Fabriz
PROFESSORA



Bárbara Fabriz
PROFESSORA

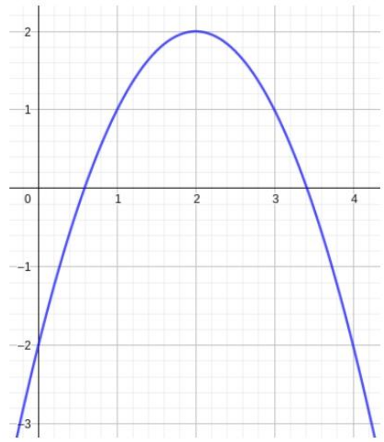
Não existem raízes reais

Bárbara Fabriz
PROFESSORA

V (-1, 4)

Bárbara Fabriz
PROFESSORA

$t(x) = -x^2 + 4x - 2$



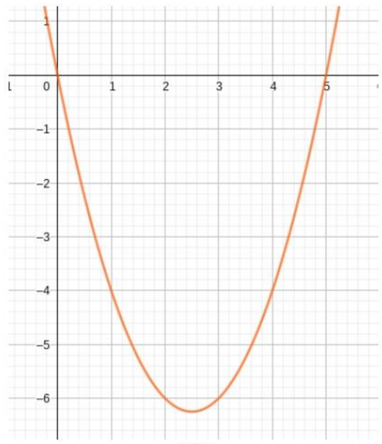
$x' \simeq 0,58$

$x'' \simeq 3,41$

$V\,(2,\ 2)$

$f(x)=x^2-5x$

Bárbara Fabriz
PROFESSORA



Bárbara Fabriz
PROFESSORA

$x' = 0$

$x'' = 5$

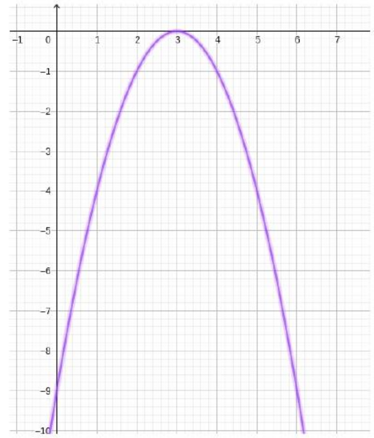
Bárbara Fabriz
PROFESSORA

V (5/2, -25/4)

Bárbara Fabriz
PROFESSORA

$g(x) = -x^2 + 6x - 9$

Bárbara Fabriz
PROFESSORA



Bárbara Fabriz
PROFESSORA

$x' = x'' = 3$

Bárbara Fabriz
PROFESSORA

V (3, 0)

Bárbara Fabriz
PROFESSORA

Dorminhoco

Bárbara Fabriz
PROFESSORA

Dorminhoco

Bárbara Fabriz
PROFESSORA

Bárbara Fabriz
PROFESSORA

Bárbara Fabriz
PROFESSORA

9.2 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MOURA, M. O. **A séria busca no jogo:** do lúdico na matemática. In: KISHIMOTO, T. M. (org.). Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação. São Paulo: Cortez, 199.

STUDY, Augusto. **Função de 2° grau**. Twitter, 2023. Disponível em: https://twitter.com/studyaugusto/status/1620461826566926338. Acesso em: 16 out. 2023.

Coeficiente “b”. Função Quadrática, 2014. Disponível em: https://funcaoquadratica2014.blogspot.com/2014/05/coeficiente-b.html. Acesso em: 15 out. 2023.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. **Demonstração das fórmulas das coordenadas do vértice**. Mundo Educação. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/demonstracao-das-formulas-das-coordenadas-vertice.htm. Acesso em: 15 out. 2023.

FABRIS, Bárbara Morais. **Jogo matemático: "Dorminhoco da função quadrática".** Hotmart Marketplace, 2021. Disponível em: https://hotmart.com/pt-br/marketplace/produtos/jogo-matematico-dorminhoco-da-funcao-quadratica/Y75512102O. Acesso em: 16 out. 2023.

9.3 MATERIAL UTILIZADO

Lista de dever de casa 6: função quadrática

1) **(ENEM 2015)** Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$ em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Figura 32: Intervalos de temperatura e classificações

Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Fonte: INEP

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como:

a) Muito baixa.

b) Baixa.

c) Média.

d) Alta.

e) Muito alta.

2) **(ENEM 2009)** Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros.
Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é:

a) $V = 10000 + 50x - x^2$

b) $V = 10000 + 50x + x^2$

c) $V = 15000 - 50x - x^2$

d) $V = 15000 + 50x + x^2$

e) $V = 15000 - 50x + x^2$

3) **(ENEM 2016)** Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola:

$$y = 9 - x^2$$

sendo x e y medidos em metros.

Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a $\frac{2}{3}$ da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do tunel.

Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?

a) 18

b) 20

c) 36

d) 45

e) 54

4) Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f, de grau menor que 3, para alterar as notas da prova para notas $y = f(x)$, da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.
- A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é

a) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$

b) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$

c) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$

d) $y = \frac{4}{5}x + 2$

e) $y = x$

5) A água é essencial para a vida e está presente na constituição de todos os alimentos. Em regiões com escassez de água, é comum a utilização de cisternas para a captação e armazenamento da água da chuva. Ao esvaziar um tanque contendo água da chuva, a expressão

$$V(t) = -\frac{1}{43200}t^2 + 3$$

representa o volume (em m^3) de água presente no tanque no instante t (em minutos)

Qual é o tempo, em horas, necessário para que o tanque seja esvaziado?

a) 360

b) 180

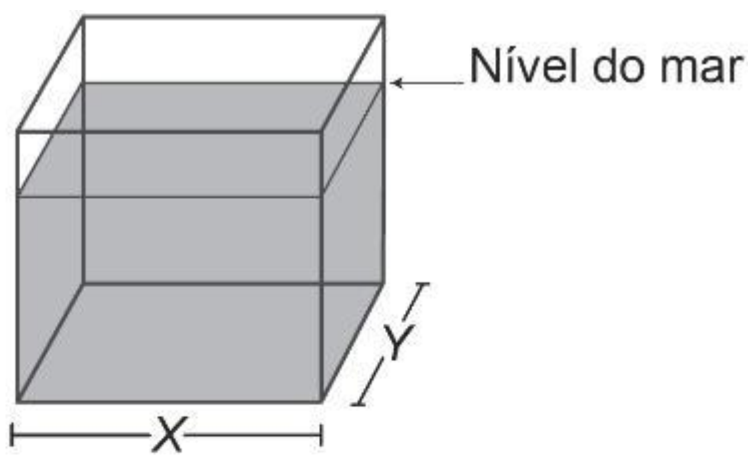
c) 120

d) 6

e) 3

6) **(ENEM 2017)** Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.

Figura 33: Viveiro de lagosta



Fonte: INEP

Quais devem ser os valores de X e de Y, em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

a) 1 e 49.

b) 1 e 99.

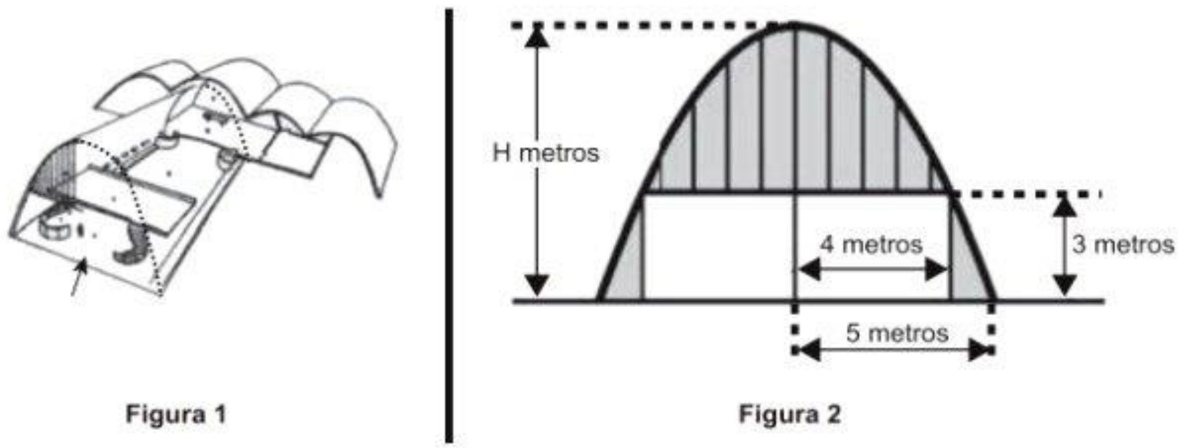
c) 10 e 10.

d) 25 e 25.

e) 50 e 50.

7) **(ENEM 2017)** A igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

Figura 34: Abóbada da igreja São Franciso de Assis



Fonte: INEP

Qual a medida da altura H, em metro, indicada na Figura 2?

a) $\frac{16}{3}$

b) $\frac{31}{5}$

c) $\frac{25}{4}$

d) $\frac{25}{3}$

e) $\frac{75}{2}$

8) **(ENEM 2016)** Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que t é expresso em dia e $t = 0$ é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.
A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer.
A segunda dedetização começou no:

a) 19º dia

b) 20º dia

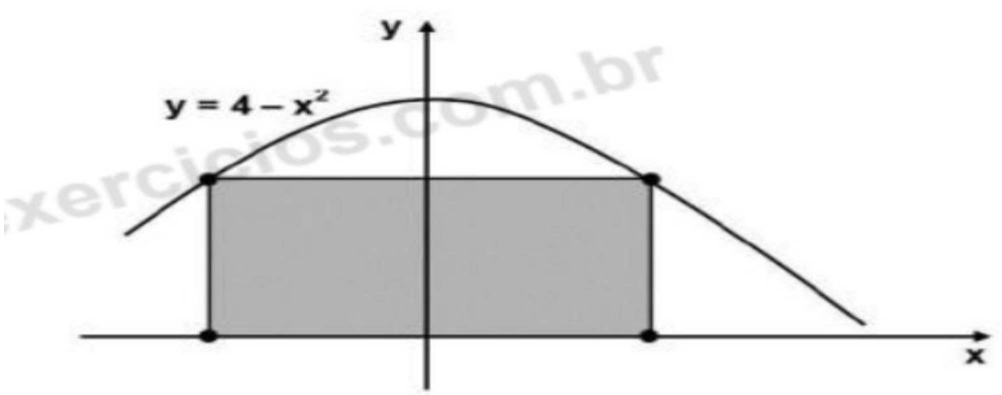
c) 29º dia

d) 30º dia

e) 60º dia

9) **(UFPR 2015)** Um retângulo no plano cartesiano possui dois vértices sobre o eixo das abscissas e outros dois vértices sobre a parábola de equação $y = 4 - x^2$ com y > 0. Qual é o perímetro máximo desse retângulo?

Figura 35: Retângulo sob a parábola



Fonte: INEP

a) 4

b) 8

c) 10

d) 12

e) 17

10) Suponha que, num período de 45 dias, o saldo bancário de uma pessoa possa ser descrito pela expressão $S(t) = 10t^2 - 240t + 1400$ sendo $S(t)$ o saldo, em reais, no dia t, para $t \in [1{,}45]$. Considerando os dados apresentados, é correto afirmar que:

a) o saldo aumentou em todos os dias do período.

b) o saldo diminuiu em todos os dias do período.

c) o menor saldo no período ocorreu em $t = 12$.

d) o menor saldo no período foi R$ 12,00.

e) o saldo ficou positivo em todos os dias do período.

9.4 RELATÓRIO DO ENCONTRO VI

No dia 21 de outubro de 2023, às 8 horas da manhã, ocorreu o sexto encontro do PROMAT (Programa de Matemática) na Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE. Este encontro teve como foco o ensino de conceitos matemáticos fundamentais para o ENEM e vestibulares, direcionado a estudantes do ensino médio e aqueles que planejam fazer essas provas. O aula foi ministrada por Luiza Stunder, Marcio Miranda, Raianny Vitoria Zerneh e Theo da Luz, com a participação de 12 alunos na nossa sala.

O encontro foi iniciado com uma atividade relacionada ao conteúdo da aula anterior, conhecida como "bingo das funções". A dinâmica era individual e abordava o cálculo de funções afins. Os alunos demonstraram interesse em resolver as questões, uma vez que acertar os cálculos era fundamental para ganhar a atividade. Entretanto, o jogo tomou mais tempo do que o planejado, resultando em atraso na conferência das cartelas e, infelizmente, foi finalizada sem que houvesse um vencedor.

Em seguida, foi apresentado o conceito de função polinomial do segundo grau, utilizando um mapa mental e relacionando-o com a atividade anterior. A explicação foi mais concisa, comparada às aulas anteriores, o que despertou maior interesse dos alunos.

Na segunda parte da aula, a turma foi dividida em três equipes e foi distribuído uma lista de exercícios para que resolvessem em grupo dentro do tempo estipulado. Durante a atividade em grupo, vários alunos enfrentaram desafios, principalmente, na interpretação dos problemas e na aplicação dos conceitos apresentados anteriormente.

Um ponto de dificuldade adicional foi a falta de orientação sobre quais questões deveriam ser resolvidas, resultando em cada grupo escolhendo as questões de acordo com o que julgavam mais interessante ou desafiador, em vez de seguir a ordem na lista.

Ao final do tempo estipulado foi perguntando aos alunos qual questão causou mais dificuldade, para que pudéssemos abordá-la na aula seguinte. Em seguida, introduzimos a atividade final da aula, um jogo denominado "O Dorminhoco das Funções do Segundo Grau". Essa atividade teve como objetivo consolidar os conceitos de funções de segundo grau que foram estudados até o momento. Optamos por manter a turma unida em um único grupo para promover maior interação, o que acabou fazendo com que jogo não fluísse tão bem devido ao grande número de participantes.

No geral, a aula contou com uma participação ativa dos alunos, e as atividades despertaram o interesse da turma. No entanto, houve a necessidade de estabelecer regras mais claras e melhorar a condução das dinâmicas para maximizar seu potencial e facilitar a correlação com os conceitos matemáticos.

10. ENCONTRO VII

10.1 PLANO DE AULA - ENCONTRO VII

Público-alvo: Alunos de todos os anos do Ensino Médio da rede pública estadual do Paraná.

Estagiários: Luiza Stunder, Márcio Vinícius Rocha Miranda, Raianny Vitória Zerneh, Theo Fernando Bonfim da Luz.

Conteúdos: Polinômios.

Objetivo geral: Relembrar os conceitos anteriormente listados e utilizá-los para resolver questões de nível ENEM e vestibulares em geral.

Objetivos específicos:

- Reconhecer estruturas polinomiais;
- Identificar os termos (símbolos diferentes), grau e coeficientes de um polinômio;
- Realizar operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios;
- Utilizar a propriedade distributiva para simplificar expressões polinomiais;
- Resolver equações polinomiais simples;
- Identificar os principais tipos de polinômios: polinômios quadráticos e cúbicos;
- Resolver exercícios práticos que envolvam polinômios e suas aplicações.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 3h e 20 minutos.

Recursos didáticos: Quadro, giz, atividades impressas, lápis, borracha, caderno, materiais para o jogo.

ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO

Retomada da aula anterior

Iniciaremos a aula com a correção da atividade 1 da lista de dever de casa 6 entregue durante a aula passada, aproveitando para tirar eventuais dúvidas ao decorrer da explicação.

(15 minutos)

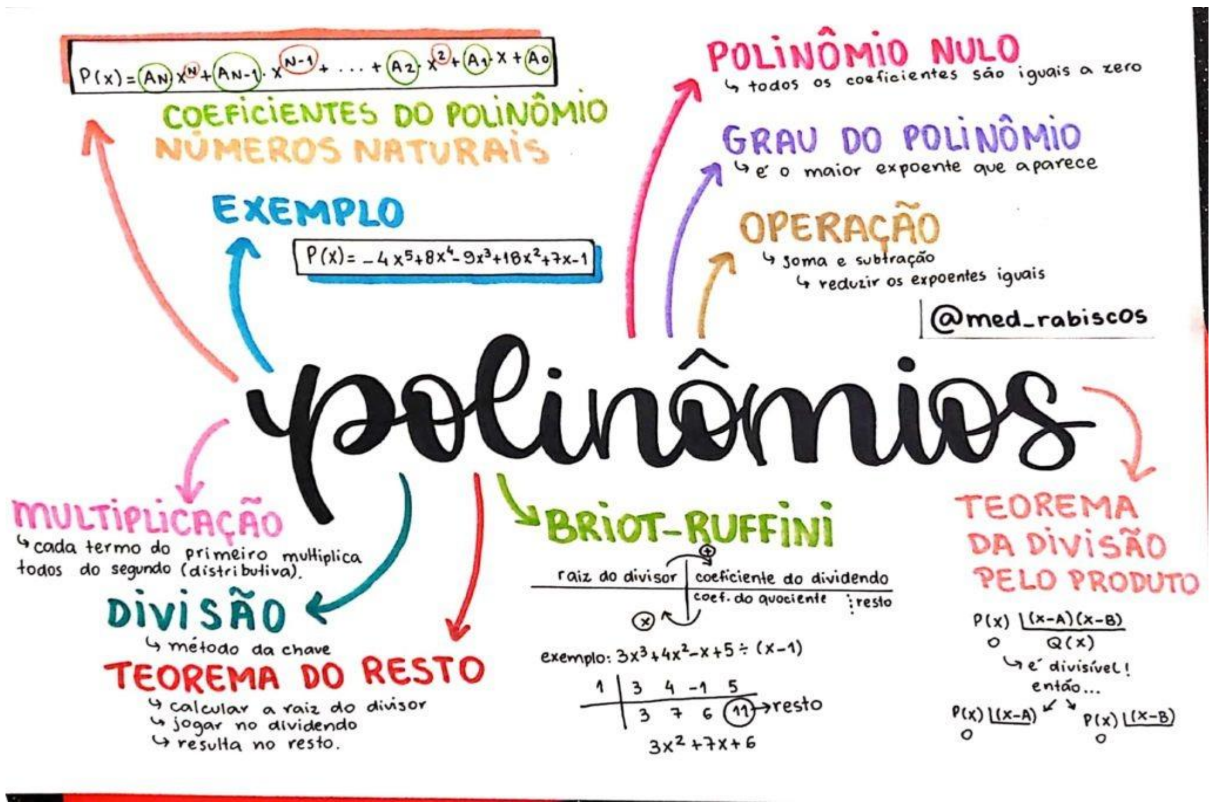
Tendo finalizado a correção da atividade, jogaremos novamente o jogo da aula passada: dorminhoco da função quadrática, a fim de retomar o conteúdo trabalhado anteriormente, e dividindo a turma em quartetos.

(50 minutos)

Introdução a polinômios

Trabalharemos a matéria de polinômios com o seguinte mapa mental.

Figura 36: Mapa mental de polinômios



Fonte: Infinittusexatas

O mapa mental será explicado de forma sucinta, dado que a maioria do conteúdo já foi visto anteriormente pelos alunos.

Informações gerais

Começaremos relembrando de expressões vistas em função afim e quadrática, falando que na função afim, a expressão possui grau um pois o maior expoente é de grau um, e na função quadrática o grau é dois pela mesma razão. Falaremos que o polinômio é a expressão obtida caso aumentarmos o grau indefinidamente, $axm^n + bxm^{n-1} + ... +n$, o grau do polinômio é igual ao maior expoente, do termo não nulo, que há na expressão, o polinômio completo possui expoentes de n até 0. O polinômio é nulo se os coeficientes forem 0.

Operações

A operação soma e subtração é dada pelo agrupamento dos coeficientes com mesma parte literal. Serão trabalhados os seguintes exemplos:

- $(x^3 + 2x + 1) + (x^2 - 7x + 2)$
- $(2x^3 + 4x + 1) - (x^2 - 5x + 8)$

Na multiplicação, aplica-se a distributiva e depois soma-se (ou subtrai-se) os resultados conforme o sinal. Segue o exemplo para ser trabalhado em sala:

- $(2x^2 + 6x + 2) \cdot (x^2 - 3x + 1)$

Para explicar a divisão, trabalharemos com o método da chave. Começaremos relembrando dos elementos da divisão por chave (dividendo, divisor, quociente e resto). Daí, falaremos que a divisão só pe possível caso o grau do divisor seja menor que o do dividendo, que o grau do quociente é a diferença do grau do dividendo pelo divisor, e que o grau do resto é menor que o do divisor ou é zero. Faremos um exemplo prático no quadro, enquanto é explicado que devemos inserir valores no quociente, multiplicá-los pelo divisor, inverter o sinal e operar no dividendo.

- $(3x^2 + 2x + 2) \div x$
- $(3x^3 + 2x^2 + 2x - 1) \div (x^2 + x + 2)$

O último exemplo será usado para demonstrar o Teorema do Resto.

Usando o Teorema do Resto e o exemplo $(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) \div (x-1)(x-2)$, demonstraremos o Teorema da Divisão pelo Produto.

40 minutos

JOGO: operando com dados

Na segunda parte da aula trabalharemos com os alunos o jogo “ Operando com dados”, onde será possível os alunos praticarem o conteúdo apresentado.

Objetivos: O jogo tem como objetivo trabalhar as operações de adição, subtração e multiplicação de polinômios de maneira lúdica. O aluno terá a oportunidade de praticar – e fixar – as operações tradicionais envolvendo polinômios a partir de 3 dados.

Composição do jogo: dois dados, sendo que, em cada um deles, há seis polinômios, de modo que nenhum polinômio utilizado no primeiro dado se repete no segundo e um dado representando as 4 operações fundamentais.

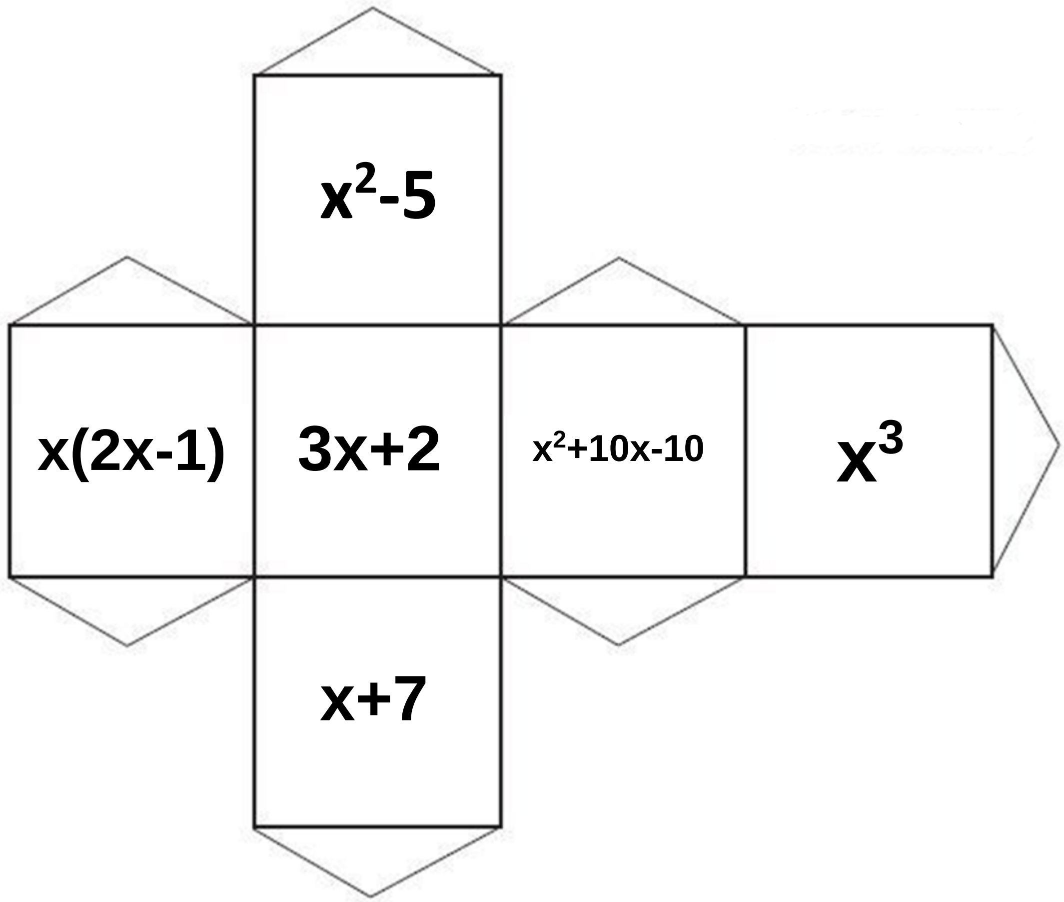
Instruções: A turma será dividida em grupos de quatro compostos de duas duplas. As duplas irão jogar umas contra as outras. Para jogar, lança-se um dos dados de polinômio, o dado de operação e em seguida o outro dado de polinômio. As duplas irão, simultaneamente, operar o primeiro dado pelo segundo mediante a operação lançada. A dupla que terminar a operação por primeiro deverá notificar seus competidores, e ambas imediatamente pararão suas contas.. Se estiver correta, o ponto será dado para a dupla que acertou e o jogo dará sequência. Caso estiver errada, o grupo deve continuar as contas até que alguma dupla finalize a operação; e o processo se repete.

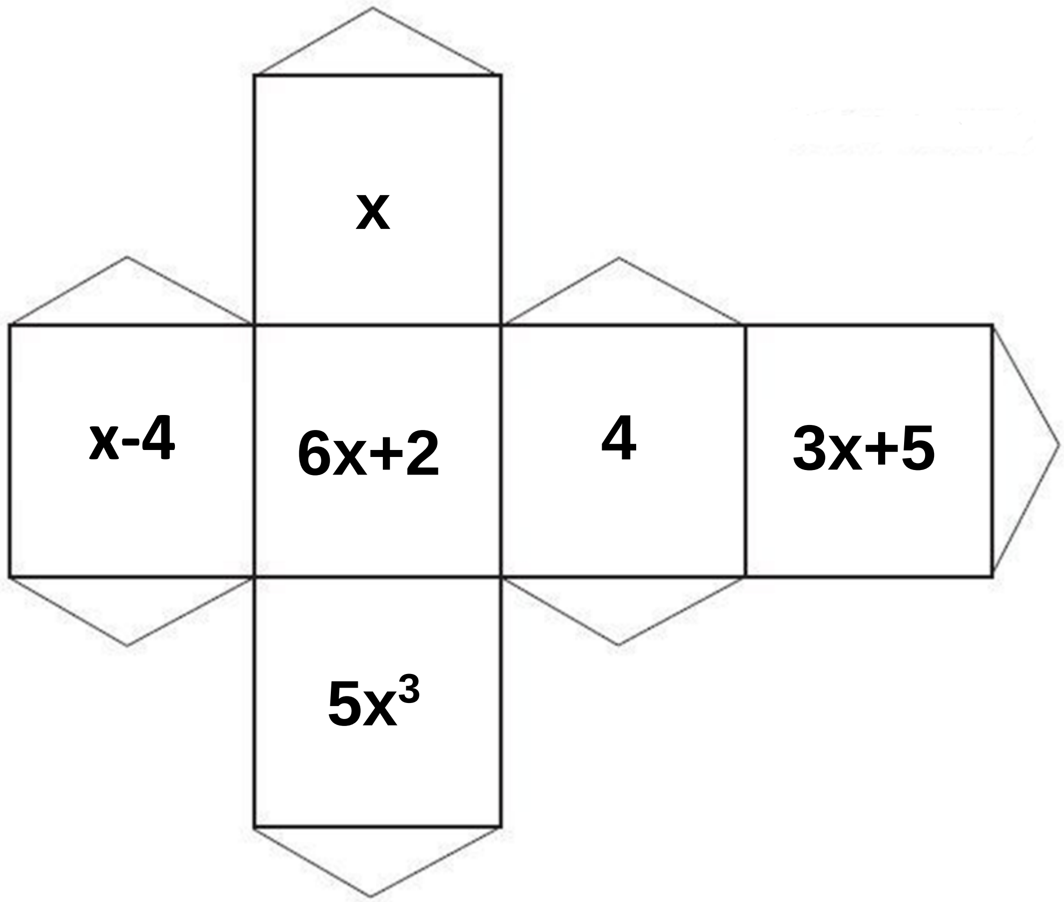
Pontuação: A pontução é ponderada. Cada acerto de adição e subtração configura um ponto para a dupla, cada acerto de multiplicação configura dois pontos e cada acerto de divisão configura três pontos.

O vencedor: Vence o jogo aquele que tiver a maior pontuação. Naturalmente, haverá uma dupla vencedora por grupo; as duplas vencedoras irão enfrentar-se até atingirem ao menos 5 pontos, até sobrar um único vencedor final. A dupla que vencer por último será recompensada.

(60 minutos)

Os dados utilizados estão disponíveis na sequência.


x^2-5
$x(2x-1)$
$3x+2$
$x^2+10x-10$
x^3
$x+7$


x
x-4
6x+2
4
3x+5
5x3

Finalizando, passaremos um exercício para que os alunos resolvam em sala de aula.

(FEI-SP) Dividindo-se $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 8x + 3$ por $S(x)$, obtêm-se um quociente $Q(x) = 2x - 1$ e um resto $R(x) = 3x + 5$. Então $S(x)$ é igual a:

a) $x^2 + x + 1$

b) $x^2 - x + 1$

c) $2x^2 + 3x - 5$

d) $x^2 + x - 2$

e) $x^2 - x + 2$

Finalizado, faremos a resolução em sala de aula.

Resolução:

$Dividendo = divisor \cdot quociente + resto$

$$P(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x)$$

$$P(x) - \frac{r(x)}{q(x)} = s(x)$$

Agora é só substituir:

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 8x + 3 - 3x - 5}{2x - 1} = s(x)$$

$$S(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 5x - 2}{2x - 1}$$

Agora, é só efetuar a divisão de polinômios, donde obtemos $x^2 - x + 2$

20 minutos

10.2 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FABRIS, Bárbara Morais. **Jogo matemático: "Dorminhoco da função quadrática". Hotmart Marketplace, 2021.** Disponível em: https://hotmart.com/pt-br/marketplace/produtos/jogo-matematico-dorminhoco-da-funcao-quadratica/Y75512102O. Acesso em: 26 out. 2023.

NETTO, Manoel de Souza Lamim. **Jogo dos polinômios - uma maneira divertida de multiplicar os polinômios.** PIBID - USP, 2017. Disponível em: https://pibiduspsc.blogspot.com/2017/06/jogo-dos-polinomios-praticando-as.html. Acesso em: 23 de outubro de 2023.

NOVAES, Jean Carlos. **Divisão de Polinômios.** Matemática Básica, 2017. Disponível em: Divisão de Polinômios: Com Exemplos Resolvidos » Matemática Básica (matematicabasica.net). Acesso em 28 out. 2023.

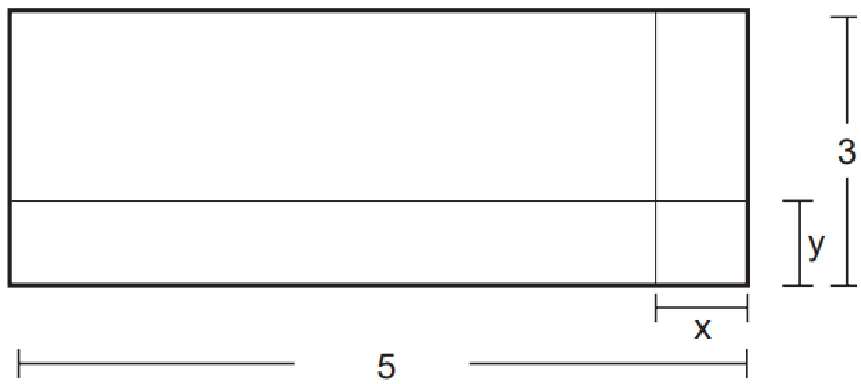
Polinômio. Projeto Agatha. Disponível em: https://www.projetoagathaedu.com.br/questoes-vestibular/matematica/algebra/polinomios.php. Acesso em 28 out. 2023.

10.3 MATERIAL UTILIZADO

Lista de dever de casa 7: polinômios

1) **(ENEM 2012)** Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é $(5 - x)\ (3 - y)$.

Figura 37: Medidas originais do forro e tamanho do encolhimento



Fonte: INEP

Nessas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por:

a) $2xy$
b) $15 - 3x$
c) $15 - 5y$
d) $-5y - 3x$
e) $5y + 3x - xy$

2) Qual deve ser o valor de k, para que o polinômio $P(x) = (k^2 - 16)x^4 + (k + 4)x^3 + kx^2 + 2x - 4$ tenha grau 2?

a) 4
b) -4
c) ± 4
d) 16
e) -16

3) **(UDESC)** Um polinômio $p(x)$ dividido por $x + 1$ deixa resto 16; por $x - 1$ deixa resto 12, e por x deixa resto -1. Sabendo que o resto da divisão de $p(x)$ por $(x + 1)(x - 1)x$ é da forma $ax^2 + bx + c$, então o valor numérico da soma das raízes do polinômio $ax^2 + bx + c$ é:

a) $\frac{3}{5}$
b) 2

c) $\frac{2}{15}$
d) 4
e) -2

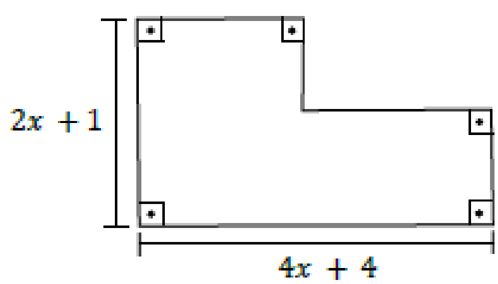
4) **(UEL)** Considere os polinômios $p(x) = -x + 1$ e $q(x) = x^3 - x$. É correto afirmar:
a) Os polinômios $p(x)$ e $q(x)$ não possuem raiz em comum.
b) O gráfico de $p(x)$ intercepta o gráfico de $q(x)$.
c) O polinômio $p(x)$ possui uma raiz dupla.
d) O resto da divisão de $q(x)$ por $p(x)$ é diferente de zero.
e) O polinômio $q(x)$ possui uma raiz dupla.

5) **(UFRGS 2017)** Considere o polinômio p definido por $p(x) = x^2 + 2(n + 2)x + 9n$. Se as raízes de $p(x) = 0$ são iguais, os valores de n são:
a) $1\ e\ 4$
b) $2\ e\ 3$
c) $-1\ e\ 4$
d) $2\ e\ 4$
e) $1\ e - 4$

6) (**IFMT – 2018**)Dividindo o polinômio $x^3 - 4x + 3$ por $x - 2$, encontramos o resto:
a) $x^2 - 3$
b) -3
c) $x + 3$
d) 3
e) $x - 3$

7) **(IFMA 2017)** O perímetro da figura pode ser escrito pelo polinômio:

Figura 38: Área da figura



Fonte: IFMA

a) $8x + 5$
b) $8x + 3$
c) $12x + 5$

d) $12x + 10$
e) $12x + 8$

10.4 RELATÓRIO DE ENCONTRO VII

Em 04 de novembro de 2023, às 8 horas da manhã, ocorreu o sétimo encontro do PROMAT (Programa de Matemática) na Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE. O encontro teve como foco o ensino de matemática básica para o ENEM e vestibular, destinado a alunos do ensino médio ou àqueles que planejam realizar essas provas. Luiza Stunder, Márcio Miranda, Raianny Vitoria Zerneh e Theo da Luz conduziram o evento, que contou com a participação de 10 alunos.

A aula foi iniciada com a retomada do jogo “dorminhoco”, apresentado na aula anterior, onde nesta ocasião em vez de 3 cartas para cada aluno, foram distribuídas 4 cartas. o jogo foi iniciado com a apresentação das regras para os alunos que não estavam presentes na aula anterior. Como no encontro anterior, surgiram dúvidas que, foram respondidas pelos acadêmicos. Nesse encontro percebeu-se que houve uma grande evolução quanto a compreensão e assimilação de funções quadráticas e seus conceitos por alguns alunos, o que fez com que levasse menos tempo até que houvesse um aluno vitorioso

A aula seguiu com a introdução do conteúdo a ser trabalhado, polinômios. A explicação se deu com ajuda de um mapa mental, que foi impresso e projetado. Também foram resolvidos exemplos no quadro.

A segunda parte da aula se deu com o término da apresentação do conteúdo e seus exemplos. Em seguida, foi proposto um exercício de fixação para os alunos. Durante a resolução, surgiram dúvidas que foram sanadas pelos acadêmicos.

Após o término do tempo estipulado para a resolução, os acadêmicos apresentaram a correção no quadro. Em seguida foi apresentado o jogo, ‘Operando com dados’. As regras do jogo foram explicadas aos alunos e a turma fui dividida em dois grupos, sendo um deles com 6 e o outro com 4 alunos. Cada grupo foi auxiliado por dois acadêmicos. Várias dúvidas surgiram durante o desenvolvimento do jogo, especialmente nos processos de divisão e multiplicação de polinômios, todas foram sanadas pelos estagiários. O encontro foi finalizado com a entrega da lista de exercícios para que os alunos resolvessem em casa.

11. ENCONTRO VIII

11.1 PLANO DE AULA – ENCONTRO VIII.

Público-alvo: Alunos do 3º ano do Ensino Médio da rede pública estadual do Paraná.

Estagiários: Luiza Stunder, Márcio Vinícius Rocha Miranda, Raianny Vitória Zerneh, Theo Fernando Bonfim da Luz.

Conteúdos: Geometria do triângulo.

Objetivo geral: Recordar propriedades dos triângulos e aplicá-las em resoluções de situações-problema.

Objetivos específicos:

- Classificar os triângulos segundo as medidas de seus lados ou de seus ângulos internos;
- Rever propriedades e características de triângulo retângulos;
- Revisar o que são triângulos semelhantes;
- Representar os elementos de um triângulo;
- Compreender o uso do Teorema de Pitágoras para triângulos retângulos.

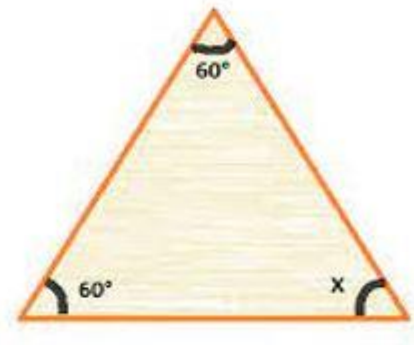
Tempo de execução: Um encontro com duração de 3h e 20 minutos.

Recursos didáticos: Quadro, giz, atividades impressas, lápis, borracha, caderno, materiais para o jogo.

ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO:

Iniciaremos falando sobre algumas propriedades do triângulo, listadas abaixo, e utilizaremos um exemplo para verificarmos se os alunos recordam a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer.

Figura 39: Triângulo utilizado para soma dos ângulos internos.



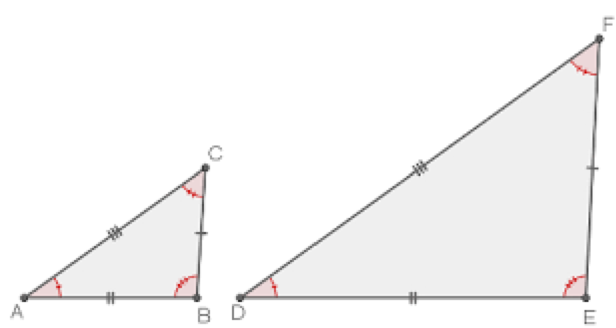
Fonte: Mundo educação

Verificaremos as respostas dadas e resolveremos o exemplo definindo, no quadro, uma propriedade sobre os ângulos internos de um triângulo qualquer.

"Em qualquer triângulo, a soma de seus ângulos internos mede 180º."

Questionaremos, a partir de outro exemplo, se dois triângulos com ângulos internos congruentes, ou seja, de mesma medida, estabelecem alguma relação de semelhança.

Figura 40*:* Exemplo de triângulos semelhantes.



Fonte: Brasil Escola

Depois das respostas dadas, definiremos, no quadro, semelhança de triângulos:

"Dois triângulos são semelhantes quando seus ângulos correspondentes são congruentes e os lados são proporcionais".

Razão de semelhança:

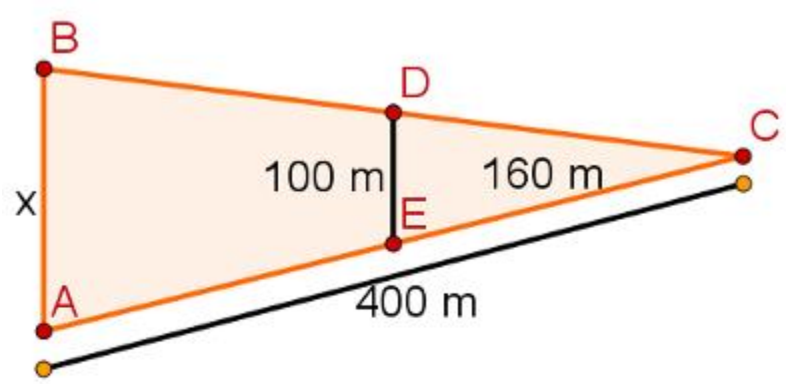
> “Quando dois triângulos são semelhantes, a razão entre dois lados correspondentes é chamada de razão de semelhança”.
>
> $$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = K$$

(20 minutos)

Posteriormente, iremos ler com os alunos o Problema 1 da lista para verificarmos o entendimento sobre o conteúdo explicado. Deixaremos cinco minutos para a resolução do deste Problema por parte dos alunos, com nosso auxílio nos grupos.

Problema 1. Na imagem a seguir, é possível perceber dois triângulos que compartilham parte de dois lados. Sabendo que os segmentos $\overline{BA}$ e $\overline{DE}$ são paralelos, qual a medida de x?

Figura 41: Triângulo usado no Problema 1.



Fonte: Brasil Escola

Resolução Proposta:

Quando um triângulo é cortado por um segmento de reta paralelo a um de seus lados, esse segmento forma um segundo triângulo menor e semelhante ao primeiro. Usaremos a relação $\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{AC}$ para resolvermos.

Substituindo os valores:

$$\frac{100}{x} = \frac{160}{400}$$

$$160 \cdot x = 400 \cdot 100$$

$$160 \cdot x = 40000$$

$$x = \frac{40000}{160}$$

$$x = 250\ m$$

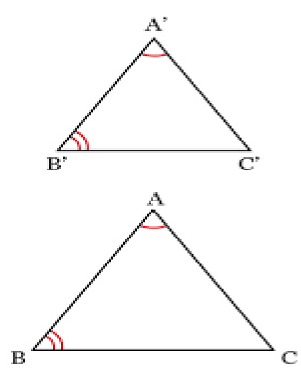
15 minutos

Finalizado a questão e resolução, definiremos brevemente, no quadro, outros critérios de semelhança:

- **AA (Ângulo-Ângulo)**

> "Se dois triângulos possuem dois ângulos respectivamente congruentes, então os triângulos são semelhantes."

Figura 42: Triângulos semelhantes por ângulo-ângulo.

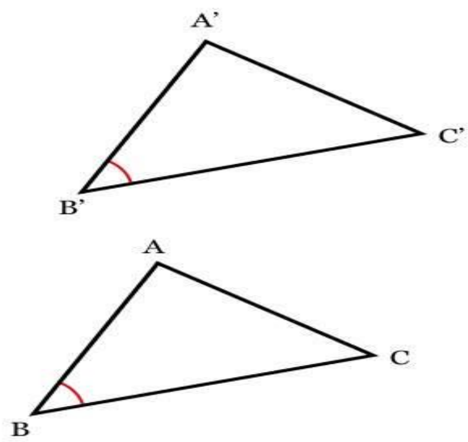


Fonte: Educa mais brasil

- **LAL (lado-ângulo-lado)**

> "Se dois triângulos têm dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes."

Figura 43: Triângulos semelhantes por LAL

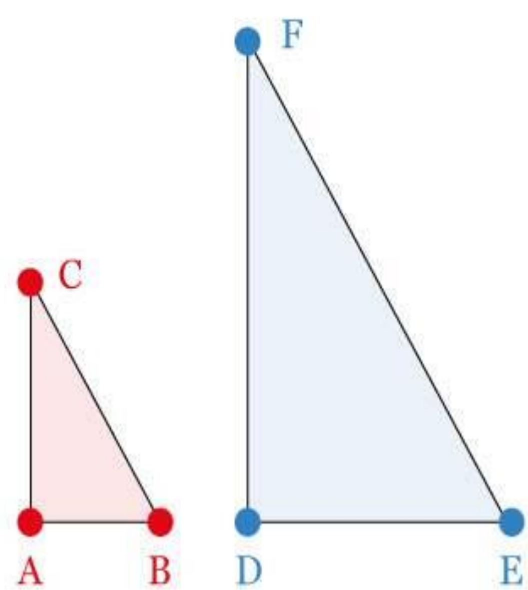


Fonte: Educa mais brasil

- **LLL (lado-lado-lado)**

"Se dois triângulos têm os lados correspondentes proporcionais, então os triângulos são semelhantes."

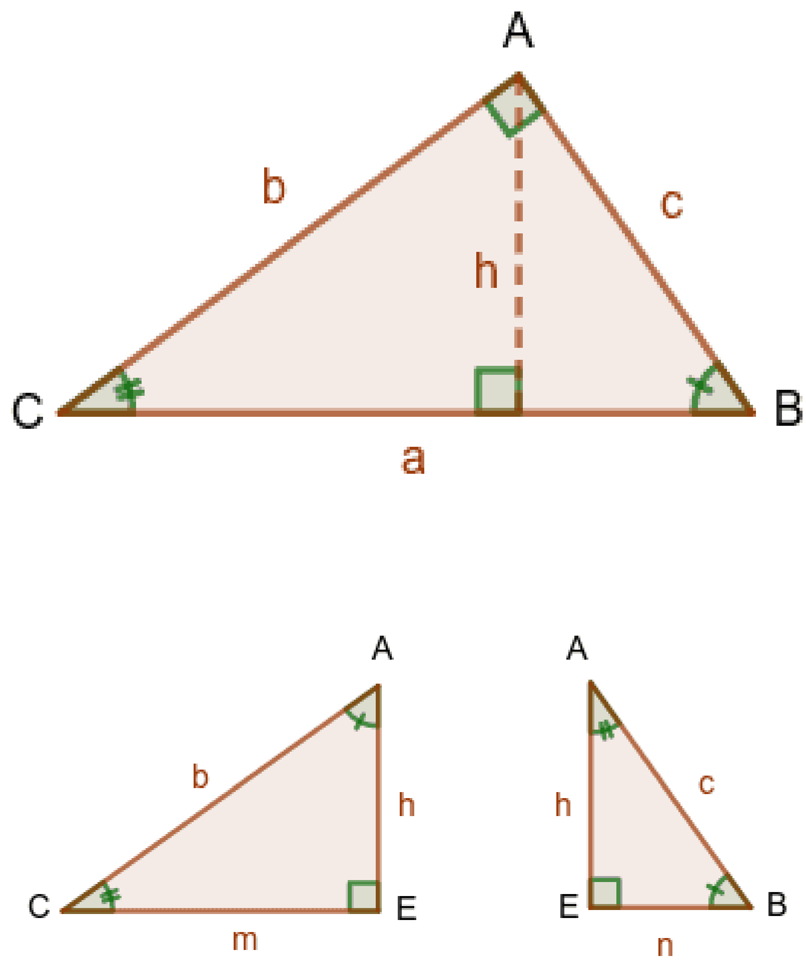
Figura 44*:* Triângulos semelhantes por LLL



Fonte: Educa mais brasil

Utilizaremos outro exemplo e questionaremos se existe semelhança dos triângulos abaixo.

Figura 45: Exemplo de semelhança.



Fonte: Mundo Educação

Após interação com os alunos, demonstraremos as semelhanças.

Resolução proposta:

No triangulo maior ABC os ângulos B e C são suplementares (a soma é 90°). No triângulo CAE, temos os ângulos C e A suplementares. Já no triângulo EBA, temos os ângulos B e A suplementares, com isso verificamos:

1) $B + C = 90°$

2) $C + A = 90°$

3) $B + A = 90°$

De 1 e 2, temos que $B = A$ ($relação\ entre\ os$ triângulos $ABC\ e\ CEA$)

De 1 e 3, temos que $C = A$ ($relação\ entre\ os$ triângulos $ABC\ e\ EBA$)

Logo os ângulos A (triângulo CEA) e B (triângulo EBA) são congruentes e os ângulos C (triângulo CEA) e A (triângulo EBA) são congruentes.

A partir dessa demonstração, utilizaremos o conceito de proporcionalidade dos lados para encontraremos relações métricas do triângulo retângulo:

i. $\Delta ABC \sim \Delta EBA\ temos\ que\ \frac{c}{a} = \frac{n}{c} \rightarrow c^2 = a \cdot n$

ii. $\Delta ABC \sim \Delta CEA\ temos\ que\ \frac{b}{a} = \frac{m}{b} \rightarrow b^2 = a \cdot m$

iii. $\Delta EBA \sim \Delta CEA\ temos\ que\ \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \rightarrow h^2 = m \cdot n$

Informaremos que a partir dessas três relações podemos tirar outras e perguntaremos qual relação obteremos somando membro a membro de *i* e *ii*.

Deixaremos cerca de cinco minutos para os alunos resolverem e em seguida, no quadro, faremos a resolução.

Resolução proposta:

$$c^2 = a \cdot n$$

$$b^2 = a \cdot m$$

$$c^2 + b^2 = a \cdot n + a \cdot m$$

$$c^2 + b^2 = a\ (m + n)$$

Como $m + n = a$ temos $c^2 + b^2 = a \cdot a\ ou\ c^2 + b^2 = a^2$

Encontraremos, assim, a relação conhecida como Teorema de Pitágoras. Comentaremos que existem outras formas de provar o Teorema de Pitágoras e deixaremos como sugestão que os alunos pesquisem essas outras formas em casa, caso tenham curiosidade. Neste momento, enfatizaremos que o Teorema de Pitágoras é válido apenas para triângulos retângulos, ou seja, que tenham um ângulo reto.

(35 minutos)

Apresentados os conceitos e resolvida a questão, trabalharemos os conceitos aprendidos até o momento utilizando um jogo, o **"Trilha de Pitágoras"**.

Trilha de Pitágoras – Resumo do jogo.

- Cada grupo irá receber um dado e 4 marcados para a trilha;
- Cada aluno terá direito a jogar o dado uma vez em cada rodada;
- O número do dado será a quantidade de casas que seu marcador irá andar;
- Será entregue ao grupo uma folha contendo a trilha de Pitágoras;
- Cada grupo irá receber um baralho de cartas contendo perguntas sobre o teorema de Pitágoras;
- A cada casa que o marcador andar terá uma pergunta que ele deverá responder;
- A pergunta estará em uma carta que será retirada por outro participante que irá realizar a pergunta;
- A cada pergunta respondida corretamente o aluno poderá permanecer na casa, caso ele erre a pergunta ele retorna a sua casa de origem;
- Ganha o jogo o aluno que responder mais perguntas corretamente e chegar à linha de chegada com seu marcador.

50 minutos

Após a volta do intervalo, aplicamos um simulado para os alunos, intentando testá-los para o ENEM. As questões com suas respectivas resoluções são as que seguem:

1) **(ENEM 2021)** A fim de reforçar o orçamento familiar, uma dona de casa começou a produzir doces para revender. Cada receita é composta de $\frac{4}{5}$ de quilograma de amendoim e $\frac{1}{5}$ de quilograma de açúcar. O quilograma de amendoim custa R$ 10,00 e o do açúcar, R$ 2,00. Porém, o açúcar teve um aumento e o quilograma passou a custar R$ 2,20. Para manter o custo com a produção de uma receita, essa dona de casa terá que negociar um desconto com o fornecedor de amendoim.
Nas condições estabelecidas, qual deverá ser o novo valor do quilograma de amendoim?
a) R$ 9,20
b) R$ 9,75
c) R$ 9,80
d) R$ 9,84
e) R$ 9,95
Primeiramente, vamos descobrir o valor inicial da receita:

$$P = \frac{4}{5} \cdot 10 + \frac{1}{5} \cdot 2 \Leftrightarrow P = 8 + \frac{2}{5} \Leftrightarrow P = 8{,}40$$

Sabendo o valor da receita, que deve manter-se fixo, resolvemos a equação para x, o novo valor do amendoim, conforme segue:

$$8{,}40 = \frac{4}{5} \cdot x + \frac{1}{5} \cdot 2{,}20 \Leftrightarrow 42 = 4x + 2{,}20 \Leftrightarrow 4x = 39{,}80 \Leftrightarrow x = 9{,}95$$

2) **(ENEM PPL 2020)** A base na Lei Universal da Gravitação, proposta por Isaac Newton, o peso de um objeto na superfície de um planeta aproximadamente esférico é diretamente proporcional à massa do planeta e inversamente proporcional ao quadrado do raio desse planeta. A massa do planeta Mercúrio é, aproximadamente, $\frac{1}{10}$ da massa da Terra e seu raio é, aproximadamente, $\frac{2}{5}$ do raio da Terra.
Considere um objeto que, na superfície da Terra, tenha peso P. Qual será o peso desse objeto na superfície de Mercúrio?
a) $\frac{5P}{16}$
b) $\frac{5P}{2}$
c) $\frac{25P}{4}$
d) $\frac{P}{8}$
e) $\frac{P}{20}$
Conforme a Lei Universal da Gravitação foi enunciada na questão, podemos extrair a seguinte fórmula para o peso: $P = \frac{m}{r^2}$, onde m é a massa do planeta e r é seu raio.
Vamos usar as relações entre massa e raio envolvendo a Terra e Mercúrio para descobrir o peso do objeto.

- $m_M = \frac{1}{10} m_T$
- $r_M = \frac{2}{5} r_T$

Vamos denotar o peso P em mercúrio em função da massa e raio da Terra.

$$P_M = \frac{m_M}{r_M} \Leftrightarrow P_M = \frac{\frac{1}{10}m_T}{\left(\frac{2}{5}r_T\right)^2} \Leftrightarrow P_M = \frac{\frac{1}{10}m_T}{\left(\frac{2}{5}\right)^2 r_T^2}$$

Veja que podemos isolar m_T e r_T^2. Dessa forma, a equação torna-se:

$$P_M = \frac{\frac{1}{10}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} \cdot \frac{m_T}{r_T^2}$$

Mas por definição, $\frac{m_T}{r_T^2}$ é P, a massa do objeto na Terra. Logo:

$$P_M = \frac{\frac{1}{10}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} \cdot P \Leftrightarrow P_M = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{25}} \cdot P \Leftrightarrow P_M = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}} \cdot P \Leftrightarrow P_M = \frac{10}{4} \cdot P \Leftrightarrow P_M = \frac{5}{2} \cdot P$$

3) **(ENEM 2013)** Muitos processos fisiológicos e bioquímicos, tais como batimentos cardíacos e taxa de respiração, apresentam escalas construídas a partir da relação entre superfície e massa (ou volume) do animal. Uma dessas escalas, por exemplo, considera que "o cubo da área S da superfície de um mamífero é proporcional ao quadrado de sua massa M".

Isso é equivalente a dizer que, para uma constante $k > 0$, a área S pode ser escrita em função de M por meio da expressão:

a) $S = k \cdot M$

b) $S = k \cdot M^{\frac{1}{3}}$

c) $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{1}{3}}$

d) $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{2}{3}}$

e) $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^2$

Se dois valores são proporcionais, significa que um desses valores é obtido a partir do outro, pela multiplicação por uma constante. Neste caso, S é proporcional a M por uma constante $k > 0$; mais especificamente, *o cubo de S (S^3)é proporcional ao quadrado M (M^2).*

Matematicamente, temos: $S^3 = k \cdot M^2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{S^3} = \sqrt[3]{k} \cdot \sqrt[3]{M^2} \Leftrightarrow S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{2}{3}}$

4) Dentre outros objetos de pesquisa, a Alometria estuda a relação entre medidas de diferentes partes do corpo humano. Por exemplo, segundo a Alometria, a área A da superfície corporal de uma pessoa relaciona-se com a sua massa m pela fórmula $A = k \cdot m^{\frac{2}{3}}$, em que k é uma constante positiva.

Se no período que vai da infância até a maioridade de um indivíduo sua massa é multiplicada por 8, por quanto será multiplicada a área da superfície corporal?

a) $\sqrt{16}$

b) 4

c) $\sqrt{24}$

d) 8

e) 64

Se a massa é multiplicada por 8, então na fórmula, ao invés de tomar m, tomamos $8m$.
Disso, vem $A = k \cdot (8m)^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow A = k \cdot 8^{\frac{2}{3}} \cdot m^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow A = k \cdot \sqrt[3]{8^2} \cdot m^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow A = k \cdot \sqrt[3]{8^2} \cdot m^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow$
$A = k \cdot \sqrt[3]{64} \cdot m^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow A = k \cdot 4 \cdot m^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow A = 4(k \cdot m^{\frac{2}{3}})$
Portanto, a área da superfície corporal A está sendo quadruplicada.

5) **(ENEM 2020**) Em um país, as infrações de trânsito são classificadas de acordo com sua gravidade. Infrações dos tipos *leves* e *médias* acrescentam, respectivamente, 3 e 4 pontos na carteira de habilitação do infrator, além de multas a serem pagas. Um motorista cometeu 5 infrações de trânsito. Em consequência teve 17 pontos acrescentados em sua carteira de habilitação.
Qual é a razão entre o número de infrações do tipo *leve* e o número de infrações do tipo *média* cometidas por esse motorista?
a) $\frac{5}{17}$
b) $\frac{3}{4}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{3}{2}$
e) $\frac{7}{17}$
Seja L a infração do tipo leve e M a infração do tipo média. Logo, temos que:
$$\begin{cases} L + M = 5 \\ 3L + 4M = 17 \end{cases}$$
Em I, fazendo $L = 5 - M$ e aplicando em II, vem que:
$3(5 - M) + 4M = 17 \Leftrightarrow 15 - 3M + 4M = 17 \Leftrightarrow M = 2$
E aplicando em I, tem que $L + 2 = 5 \Leftrightarrow L = 3$
Logo, a razão procurada é $\frac{L}{M} = \frac{3}{2}$

6) **(ENEM 2010)** O Salto Triplo é uma modalidade do atletismo em que o atleta dá um salto em um só pé, uma passada e um salto, nessa ordem. Sendo que o salto com impulsão em um só pé será feito de modo que o atleta caia primeiro sobre o mesmo pé que deu a impulsão; na passada ele cairá com o outro pé, do qual o salto é realizado.
Um atleta da modalidade Salto Triplo, depois de estudar seus movimentos, percebeu que, do segundo para o primeiro salto, o alcance diminuía em 1,2 m, e, do terceiro para o segundo salto, o alcance diminuía 1,5 m. Querendo atingir a meta de 17,4 m nessa prova e considerando os seus estudos, a distância alcançada no primeiro salto teria de estar entre:
f) 4,0 m e 5,0 m
g) 5,0 m e 6,0 m
h) 6,0 m e 7,0 m
i) 7,0 m e 8,0 m
j) 8,0 m e 9,0 m
A distância percorrida no segundo e terceiro salto são funções da distância percorrida no primeiro salto. Logo, todas as distâncias podem ser expressas a partir da primeira distância.

Distância do primeiro salto: x
Distância do segundo salto: x – 1,2
Distância do terceiro salto: x – 1,2 – 1,5 ⇔ x – 2,7 (diminui 1,5 em relação ao segundo salto)
A soma das distâncias percorridas deve ser igual a 17,4 m. Logo:

$$x + (x - 1{,}2) + (x - 2{,}7) = 17{,}4$$
$$3x - 3{,}9 = 17{,}4$$
$$3x = 21{,}3$$
$$x = 7{,}1$$

E 7,1 está no intervalo de 7,0 a 8,0

7) A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento $(t = 0)$ e varia de acordo com a expressão $T(t) = \frac{-t^2}{4} + 400$ com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39 ºC. Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?
a) 19,0
b) 19,8
c) 20,0
d) 38,0
e) 39,0
$T(t)$ é uma função da temperatura interna T do forno pelo tempo t passado a partir do seu desligamento (ou seja, $t = 0$).
Queremos saber quanto tempo leva para que a temperatura interna chegue a 39 ºC. Ou seja, o valor procurado é a solução da equação quadrática $\frac{-t^2}{4} + 400 = 39 \Leftrightarrow \frac{-t^2}{4} + 361 = 0$
Resolvendo por Bháskara, vem que $t_1 = 38$ e $t_2 = -38$. Como o tempo passado após o desligamento não pode ser negativo, temos que $t = 38$.

8) **(ENEM 2017 | Libras)** A única fonte de renda de um cabeleireiro é proveniente de seu salão. Ele cobra R$ 10,00 por cada serviço realizado e atende 200 clientes por mês, mas está pensando em aumentar o valor cobrado pelo serviço. Ele sabe que cada real cobrado a mais acarreta uma diminuição de 10 clientes por mês.
Para que a renda do cabeleireiro seja máxima, ele deve cobrar por serviço o valor de:
a) R$ 10,00
b) R$ 10,50
c) R$ 11,00
d) R$ 15,00
e) R$ 20,00
Desejamos encontrar o valor máximo da função renda do cabeleleiro. Sabemos que ele cobra R$ 10,00 por serviço realizado, com a possibilidade de aumento. Logo, o valor do serviço é $(10 + x)$. Ele atende 200 clientes mensalmente, e simultaneamente, *um aumento de R$ 1,00 no preço está para uma diminuição de 10 clientes.* Se são 200 clientes mensalmente,

expressamos isso como $(200 - 10x)$ clientes. Ambas as expressões são para x aumentando de 1 em 1 real.
A renda será dada pelo produto do valor do serviço pela quantidade de clientes. Logo, $R(x) = (10 + x) \cdot (200 - 10x) = 2000 - 100x + 200x - 10x^2 = -10x^2 + 100x + 2000$.
Queremos o valor do serviço que maximize a renda. Nesta função que encontramos, x representa um aumento no preço do serviço. Logo, o valor máximo de x (do aumento) está associado ao valor máximo da renda.
Encontramos o valor máximo de x com a equação do vértice $x_v = \frac{-b}{2a}$.

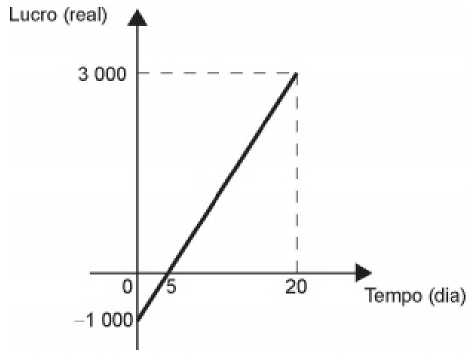
$$x_v = \frac{-100}{2 \cdot (-10)} = \frac{-100}{-20} = 5$$

Agora somamos o aumento x com o preço base de R$ 10,00, e vem que o valor máximo é $5 + 10 = 15$.

9) **(ENEM 2019)** Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R$ 1 000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um deles trabalha 2 dias por semana, recebendo R$ 80,00 por dia trabalhado.
Chamando de x a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia y, em reais, que esta empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por:
f) $y = 80x + 920$
g) $y = 80x + 1000$
h) $y = 80x + 1080$
i) $y = 160x + 840$
j) $y = 160x + 1000$
Estamos atrás de uma função de custo, que nos indique o custo semanal para manter o quadro de funcionários da empresa. Sabemos o preço para manter o gerente e os funcionários, portanto faremos uma função de custo em função dos funcionários.
Sabemos que existe apenas um gerente, cujo custo semanal resume-se a R$ 1000,00. Os demais funcionários trabalham duas vezes por semana, a uma diária de R$ 80,00; logo, o custo para manter os funcionários, se a quantidade de funcionários é desconhecida, é $(2) \cdot (80)x = 160x$.
A função procurada é o custo dos funcionários somado ao custo do gerente. Logo, $y = 160x + 1000$.

10) **(ENEM 2017)** Em um mês, uma loja de eletrônicos começa a obter lucro já na primeira semana. O gráfico representa o lucro (L) dessa loja desde o início do mês até o dia 20. Mas esse comportamento se estende até o último dia, o dia 30.

Figura 46: Lucro em função do tempo



Fonte: INEP

A representação algébrica do lucro (L) em função do tempo (t) é:

a) $L(t) = 20t + 3000$
b) $L(t) = 20t + 4000$
c) $L(t) = 200t$
d) $L(t) = 200t - 1000$
e) $L(t) = 200t + 3000$

Esta função é linear, de primeiro grau. Logo, ela obedece a lei genérica de $f(x) = ax + b$.
Observe que o coeficiente linear, b (ponto em que o gráfico toca o eixo y) é negativo, igual a $b = -1000$. Simultaneamente, temos o ponto $A(5,0)$.
Conhecendo b, substituindo na lei genérica utilizando o ponto A, com $5a - 1000 = 0 \Leftrightarrow 5a = 1000 \Leftrightarrow a = 200$.
Assim, a função desejada é $L(t) = 200t - 1000$

11)(ENEM 2017 | Libras) O morro onde estão situadas as emissoras de TV em Porto Alegre pode ser representado graficamente, com algum prejuízo, em um sistema cartesiano, através de uma função polinomial de grau 2 da forma $y = ax^2 + bx + c$, com a base da montanha no eixo das abscissas.

Figura 47: Morro de Porto Alegre

Fonte: INEP

Para que fique mais adequado essa representação, devemos ter:

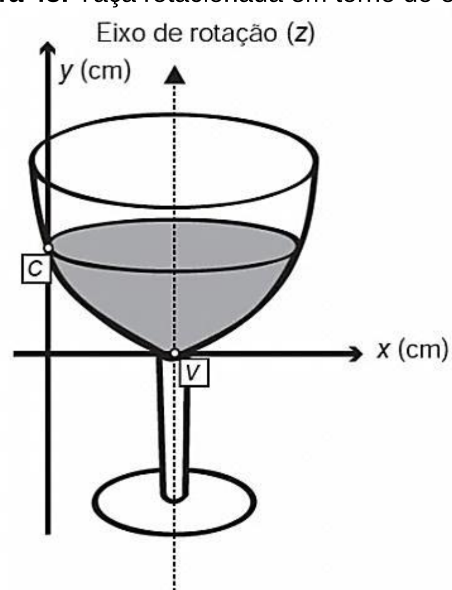
a) $a > 0$ e $b^2 - 4ac > 0$
b) $a > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$
c) $a < 0$ e $b^2 - 4ac < 0$

d) $a < 0$ e $b^2 - 4ac > 0$
e) $a < 0$ e $b^2 - 4ac = 0$

A base da montanha foi fixada como o eixo x. Ou seja, podemos ver que a orientação da parábola com este eixo fixado é com a concavidade para baixo; isso significa que $a < 0$.
Simultaneamente, podemos ver que a parábola toca o eixo x (base da montanha) em dois pontos distintos: ou seja, temos duas raízes positivas distintas. Na análise de $\Delta = b^2 - 4ac$, isso significa que $\Delta > 0$.
Ou seja, temos $a < 0$ e $\Delta > 0$.

12)(ENEM 2013) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.

Figura 48: Taça rotacionada em torno do eixo z



Fonte: INEP

A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$$

onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x. Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é:

a) 1
b) 2
c) 4
d) 5
e) 6

Veja que a parábola possui concavidade voltada para cima, logo, o vértice V representa o ponto mínimo da função. Simultaneamente, o vértice é o *único* ponto onde a parábola toca no eixo x: ou seja, o vértice é também a raiz única da função. Isto significa que $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.
Substituindo em Δ, vem que:

- $b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow (-6)^2 - 4\left(\frac{3}{2}\right)c = 0 \Leftrightarrow 36 - 6c = 0 \Leftrightarrow -6c = -36 \Leftrightarrow c = 6$

13)(UEL) Considere os polinômios $p(x) = -x + 1$ e $q(x) = x^3 - x$. É correto afirmar:

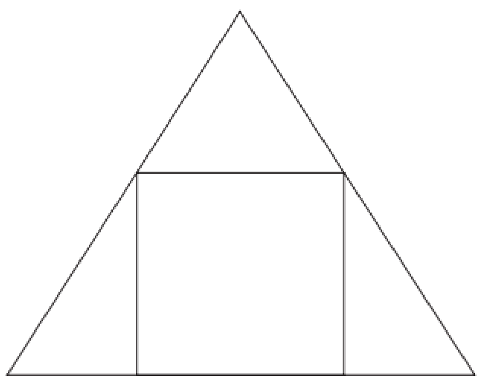
a) Os polinômios $p(x)$ e $q(x)$ não possuem raiz em comum.
b) O gráfico de $p(x)$ intercepta o gráfico de $q(x)$.
c) O polinômio $p(x)$ possui uma raiz dupla.
d) O resto da divisão de $q(x)$ por $p(x)$ é diferente de zero.
e) O polinômio $q(x)$ possui uma raiz dupla.'

Analisando sentença por sentença:

a) Errada, pois $x = 1$ é uma raiz comum;
b) Se ambos os gráficos interceptam-se, então a equação $-x + 1 = x^3 - x$ tem solução. De fato, $-x + 1 = x^3 - x \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1} \Leftrightarrow x = 1$; a opção (b) é correta.
c) O polinômio $p(x)$ é de grau 1, portanto tem uma única raiz. Errada.
d) Pelo teorema do resto, o resto de $\frac{q(x)}{p(x)}$ é igual à aplicação da raiz de $p(x)$ em $q(x)$. A raiz de $p(x)$ é $x = 1$, que sabemos deixar $y = 0$ em $q(x)$. Errada.
e) Por $q(x)$ ser de grau 3, o polinômio possui 3 raizes ao invés de 2. Errada.

14)(ENEM 2021) Os alunos do curso de matemática de uma universidade desejam fazer uma placa de formatura, no formato de um triângulo equilátero, em que os seus nomes aparecerão dentro de uma região quadrada, inscrita na placa, conforme a figura.

Figura 49: Placa de formatura

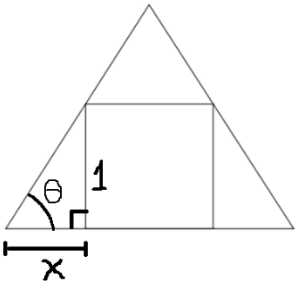


Fonte: INEP

Considerando que a área do quadrado, em que aparecerão os nomes dos formandos, mede $1\ m^2$, qual é aproximadamente a medida, em metro, de cada lado do triângulo que representa a placa? (Utilize $1{,}7$ como valor aproximado para $\sqrt{3}$).

a) 1,6
b) 2,1
c) 2,4
d) 3,7
e) 6,4

Se o quadrado possui área de $1\ m^2$, então todos os seus lados possuem medida $1\ m$.
Considere o ângulo θ conforme a figura:



Pelo fato de tratar-se de um triângulo equilátero, logo, todos os lados e os ângulos internos do triângulo são iguais. Dessa maneira, $\theta = 60^o$.

Tomemos a tangente de $\theta = 60^o$: $tg(60) = \frac{1}{x}$

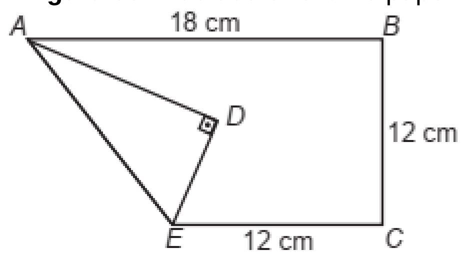
Sabemos que $tg(60) = \sqrt{3}$. Logo,

$$tg(60) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x\sqrt{3} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{1{,}7}$$
$$\Leftrightarrow x \approx 0{,}58$$

Por tratar-se de um triângulo equilátero, o valor do lado do triângulo à direita é exatamente o mesmo. Portanto, concluímos que a medida da base do triângulo é $0{,}58 + 0{,}58 + 1 \approx 2{,}16$

15)(ENEM 2019) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do origami (*ori = dobrar; gami = papel*), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do origami é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do origami, utilizando uma folha de papel de $18\ cm$ por $12\ cm$. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.

Figura 50: Dobradura feita no papel



Fonte: INEP

Após essa primeira dobradura, a medida do segmento AE é

a) $2\sqrt{22}$ cm.

b) $6\sqrt{3}$ cm.

c) 12 cm.

d) $6\ \sqrt{5}$ cm.

e) $12\sqrt{2}$ cm.

Note que o papel utilizado para a dobra possui um formato geométrico retangular, com os lados AB, DC paralelos entre si, e os lados AD, BC também paralelos. Neste sentido, $AB = DC$ e $AD = BC$; portanto, $AD = 12$ e $ED = 18 - 12 = 6$.

Portanto, podemos aplicar o teorema de Pitágoras para obter a medida do lado AE:

- $AE^2 = 12^2 + 6^2 \Leftrightarrow AE^2 = 144 + 36 \Leftrightarrow AE^2 = 180 \Leftrightarrow AE = \sqrt{180}$

Fatorando 10, vem que $180 = 4 \cdot 9 \cdot 5$; logo,

- $AE = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 5} \Leftrightarrow AE = 6\sqrt{5}$

11.2 REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

LEDUR, B. S.; ENRICONI, M. H. S.; SEIBERT, T. E. A, **Trigonometria por meio da construção de conceitos**. São Leopoldo: Unisinos, 2001.

SANTOS, Thamires. **Semelhança De Triângulos**. Educa Mais. Disponível em: https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/semelhanca-de-triangulos. Acesso em: 04 nov. 2023.

Trilha Pitagórica - Uma Atividade Lúdica. Matemapirando, 2022. Disponível em: https://matemapirando.blogspot.com/2022/10/trilha-pitagorica-uma-atividade-ludica.html. Acesso em: 04 nov. 2023.

GOUVEIA, Rosimar. **Função Quadrática - Exercícios.** Toda Matéria. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/funcao-quadratica-exercicios/. Acesso em: 04 nov. 2023.

11.3 RELATÓRIO DE ENCONTRO VIII

Em 11 de outubro de 2023, às 8 horas da manhã, ocorreu o oitavo encontro do PROMAT (Programa de Matemática) na Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE. O encontro teve como foco o ensino de matemática básica para o ENEM e vestibular, destinado a alunos do ensino médio ou àqueles que planejam realizar essas provas. Luiza Stunder, Márcio Miranda, Raianny Zerneh e Theo da Luz ministraram a aula que contou com a participação de 11 alunos.

No início, foi abordado o conteúdo relacionado à trigonometria com a devida conceituação. Foi observada certa apatia nos alunos durante a explicação, o que motivou a busca por maneiras de correlacionar o conteúdo com algo visual que fosse familiar a eles. A seguir foram dadas atividades práticas para que pudessem aplicar os conceitos aprendidos. A realização dessas atividades permitiu oferecer suporte individualizado a cada aluno, ajustando-se às suas necessidades.

Para reforçar o entendimento, foi realizado uma demonstração prática do teorema de Pitágoras, com um exemplo no quadro, o que despertou o interesse da turma. Em seguida, a turma foi dividida em dois grupos de quatro alunos e um trio e foi introduzido o jogo "Trilha de Pitágoras". Os quartetos optaram em se dividir em dupla o que proporcionou uma maior troca de experiências entre os alunos e uma melhor performance no jogo. O engajamento foi notável e os alunos puderam aplicar os conceitos apresentados de forma prática, buscando resolver as questões e vencer o desafio.

Após o intervalo, foi aplicado um simulado, com exercícios retirados das provas de ENEM dos anos anteriores, abrangendo todos os conteúdos apresentados até então, servindo como preparatório para a prova de exatas do ENEM, agendada para o domingo seguinte (12/11/2023). Embora tenha sido recomendado realizar o simulado de forma individual e sem consulta a materiais ou dispositivos, algumas alunas não seguiram a orientação. Em um determinado momento, houve solicitação coletiva para que não consultassem os colegas. Alguns alunos concluíram o simulado antecipadamente, o que nos levou a fornecer dicas adicionais e revisões para garantir maior assertividade nas respostas.

Em avaliação geral, foi observado que os alunos têm dificuldades em compreender conceitos e explicações sem exemplos práticos. Os jogos demonstraram ser eficazes para engajar os alunos na assimilação dos temas abordados. Contudo, foi identificado desafios relacionados ao simulado, especialmente no que diz respeito a alunos que concluíram a avaliação antecipadamente, resultando em ajustes necessários no planejamento ao final da aula.

12. ENCONTRO IX

12.1 PLANO DE AULA – ENCONTRO IX

Público-alvo: Alunos do 3º ano do Ensino Médio da rede pública estadual do Paraná.

Estagiários: Luiza Stunder, Márcio Vinícius Rocha Miranda, Raianny Vitória Zerneh, Theo Fernando Bonfim da Luz

Conteúdos: Geometria da circunferência e do círculo.

Objetivo geral: Recordar propriedades da circunferência e aplicá-las em resoluções de situações-problema, questões nível ENEM etc.

Objetivos específicos:

- Identificar e diferenciar os elementos geométricos circunferência e círculo e suas propriedades;
- Calcular a área do círculo e o comprimento da circunferência;
- Identificar uma circunferência a partir da equação $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, onde r é o raio da circunferência;
- Utilizar diferentes unidades de medidas para ângulos;
- Compreender noções de ângulos na circunferência;

Tempo de execução: Um encontro com duração de 3h e 20 minutos.

Recursos didáticos: Quadro, giz, atividades impressas, lápis, borracha, caderno, materiais interativos.

ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO

Retomada da aula anterior

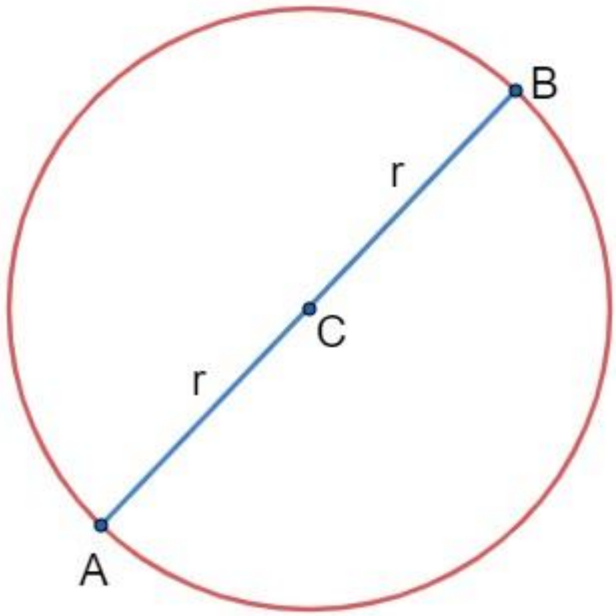
Vamos retomar o simulado aplicado na aula anterior. Perguntaremos aos alunos quais são as questões que eles mais sentiram dúvidas, e faremos uma resolução comentada passo-a-passo. As questões do simulado estão listadas no plano anterior.

(40 minutos)

Circunferência e círculo

Começaremos perguntando aos alunos o que é uma circunferência e como eles a definiriam. Ouvidas as respostas, formalizaremos o conceito:

Figura 51: Exemplo de circunferência com suas denominações



Fonte: Brasil Escola

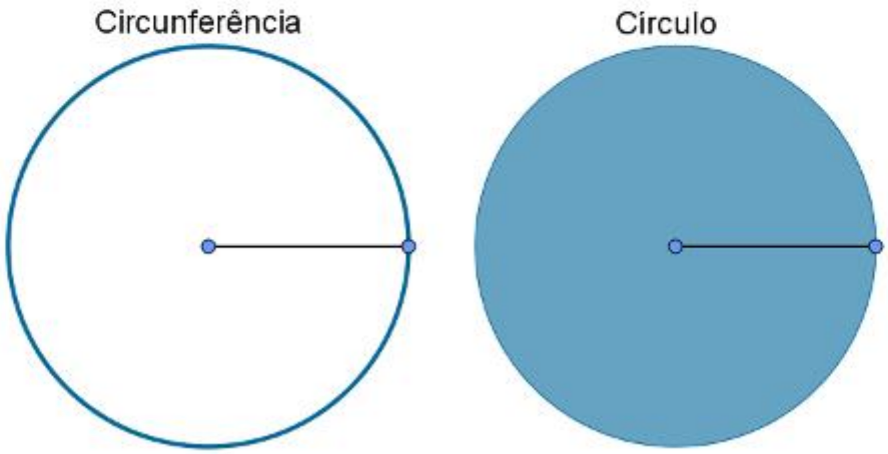
A circunferência é o conjunto dos pontos que equidistam do mesmo ponto

Nisso, utilizaremos a imagem para descrever visualmente. Mostraremos que todos os pontos sobre a circunferência (em vermelho) estão a uma distância r do ponto C; aproveitaremos para descrever os elementos da circunferência:

- r é chamado de raio, a distância da circunferência ao centro;
- C é chamado de centro da circunferência;
- $\overline{AB}$ é um segmento de reta que passa pelo centro; neste caso, *todo* segmento de reta que passa por C é chamado de *diâmetro*, e tem comprimento $d = 2r$.
- Uma *corda* é um segmento de reta que une dois pontos da circunferência.
- A circunferência possui uma angulagem total de 360^0.

Nisso, explicaremos a diferença entre círculo e circunferência:

Figura 52: Exemplo de circunferência e círculo



Fonte: Mundo Educação

O círculo é a união da circunferência e os pontos internos a ela.

Com isto, explicaremos a fórmula de comprimento da circunferência e área do círculo: o comprimento da circunferência corresponde ao perímetro da figura, calculado pela fórmula $C = 2\pi r$ e a área da circunferência é a área da figura, com $A = \pi r^2$. Passaremos um exemplo para que os alunos possam praticar:

i. Um ciclista deu 30 voltas em uma pista circular. Ao olhar seus equipamentos de medida, ele percebeu que a distância percorrida nessas 30 voltas foi de 90 km. Considere $\pi = 3{,}14$ e responda:

a. Qual a medida de comprimento de uma única volta?

b. Qual a medida aproximada do raio da pista?

c. Considerando o círculo associado à circunferência, qual o valor de sua área?

Resolução:

a. Sabemos que após 30 voltas, a distância percorrida foi de $90\ km$. Logo, a soma de trinta voltas resulta em $90\ km$. Ou seja, $30 \cdot 2\pi r = 90 \Leftrightarrow 2\pi r = 3\ km$, logo uma volta mede $3\ km$.

b. Sabendo que $2\pi r = 3$ e $\pi \approx 3{,}14$, fazemos $2 \cdot (3{,}14) \cdot r = 3 \Leftrightarrow 6{,}29r = 3 \Leftrightarrow r \approx 0{,}48\ km$

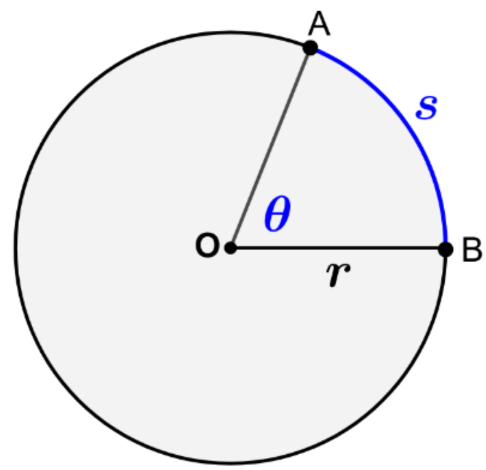
c. Sabendo que $r \approx 0{,}48$ e $\pi \approx 3{,}14$, tomamos a fórmula $A = \pi r^2$. Assim, vem que $A = (3{,}14) \cdot (0{,}48)^2 \Leftrightarrow (3{,}14) \cdot (0{,}2304) = A \Leftrightarrow A \approx 0{,}72\ km^2$

(15 minutos)

Arcos e ângulos

Na circunferência, sejam dois pontos A e B. Define-se arco como:

Figura 53: Circunferência com um arco AB



Fonte: Neurochispas

Dados pontos A e B da circunferência, um *arco* é a medida de comprimento delimitada por esses dois pontos, e neste caso, escrevemos $\widehat{AB} = s$.

Explicado o que é arco, mostraremos aos alunos que quando tomamos um arco qualquer da circunferência, e ligamos esses pontos ao centro da circunferência através do arco, um ângulo é definido. Neste caso, esse ângulo é chamado de *ângulo central*, e tem medida $A\hat{O}B = \theta$.

Quando tomamos uma medida de arco igual ao arco da circunferência, $\widehat{AB} = r$, o ângulo central θ é aproximadamente $\theta \approx 57^0$. A esse valor de ângulo, obtido dessa maneira, chamamos de *radiano*. Explicaremos aos alunos que a quantidade total de radianos da circunferência é obtido pela razão do comprimento pelo raio, ou seja, $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi\ rad = 360^0$.

Perguntaremos aos alunos se eles conseguem imaginar uma forma de relacionar o ângulo central com o comprimento de arco $\widehat{AB}$. Após responderem, mostremos a maneira:

i. A medida de comprimento total da circunferência é $2\pi r$;

ii. A angulagem total da circunferência é 2π;

iii. Quando definimos um arco com um ângulo central, o ângulo "enxerga" essa medida de comprimento;

iv. Logo, podemos aplicar uma regra de 3:

$$\begin{array}{cc} 2\pi r & 2\pi \\ s & \theta \end{array}$$

Fazendo a multiplicação, vem que $2\pi s = 2\pi r\theta \Leftrightarrow s = \frac{2\pi r\theta}{2\pi} \Leftrightarrow s = r\theta$, com θ em radianos.

Seja uma circunferência de raio r, uma medida de arco $\widehat{AB} = s$ e um ângulo central θ que enxerga essa medida de arco. Então, o comprimento de $\widehat{AB} =$

Daremos ênfase ao fato de que o ângulo precisa estar em radiano. Dessa maneira, explicaremos a conversão de graus para radianos, com um processo também usando regra de três:

i. A angulagem total da circunferência, em radianos, é 2π;

ii. A mesma angulagem, em graus, é 360^0;

iii. Seja um ângulo α em graus e um ângulo β em radianos;

iv. Logo, vem que:

$$\begin{array}{cc} 2\pi & 360 \\ \beta & \alpha \end{array}$$

E daí, $360\beta = 2\pi\alpha \Leftrightarrow \beta = \frac{2\pi\alpha}{360} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi\alpha}{180}$ para radianos

e $2\pi\alpha = 360\beta \Leftrightarrow \alpha = \frac{360\beta}{2\pi} \Leftrightarrow \alpha = \frac{180\beta}{\pi}$.

Seja uma medida de ângulo α em graus e a mesma medida β em radianos. Então, $\beta = \frac{\pi\alpha}{180}$ e $\alpha = \frac{180\beta}{\pi}$.

Explicaremos aos alunos que é possível utilizar uma relação similar à de comprimento e ângulo com área e ângulo.

i. Quando um ângulo enxerga um arco, ele deixa restrito uma parte do círculo;

ii. O círculo possui angulagem de $2\pi\ rad$;

iii. A área total do círculo é πr^2;

iv. Logo, considerando um ângulo central θ:

$$\begin{array}{cc} \pi r^2 & 2\pi \\ A & \theta \end{array}$$

$2\pi A = \pi r^2\theta \Leftrightarrow A = \frac{\pi r^2\theta}{2\pi} \Leftrightarrow A = \frac{r^2\theta}{2}$

v. Se ao invés da angulagem, tivéssemos o comprimento da circunferência, a deducação seria análoga com $2\pi r$, e daí $A = \frac{rs}{2}$, com s o comprimento do arco enxergado pelo ângulo central.

Numa circunferência de raio r, seja um ângulo θ que enxerga um comprimento de arco $\widehat{AB} = s$. Então, a área do setor circular delimitado pelo ângulo e pelo arco é igual a $A = \frac{r^2\theta}{2} = \frac{rs}{2}$.

Passaremos um exercício para fixação.

ii. Seja um arco que tem um ângulo central de 60°, numa circunferência de comprimento 12 m

a. Qual a medida de comprimento do arco?
b. Qual a área do setor circular que esse ângulo e arco definem?

Resolução:

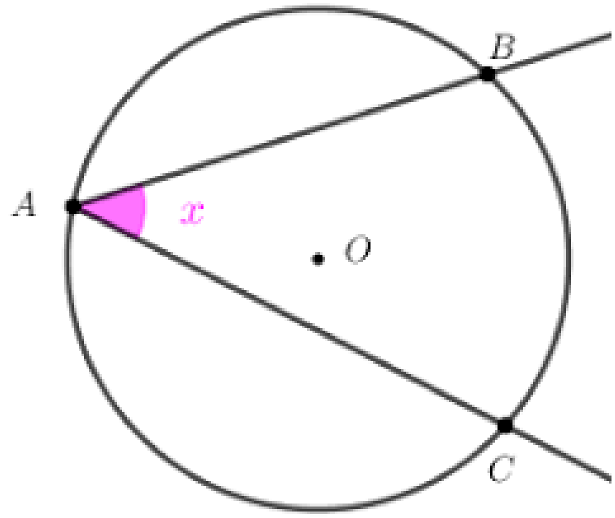
a. Primeiro, sabemos que $2\pi r = 12$, então $r = \frac{12}{2\pi} \Leftrightarrow r = \frac{6}{\pi}\ m$. Transformando o ângulo em radianos, vem que $\beta = \frac{\pi 60}{180} = \frac{\pi}{3}$. Agora, substituimos em $s = r\theta$; e daí, $s = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{\pi}{3} = 2\ m$.

b. Sabendo que o comprimento do arco é de $2\ m$, substituimos na fórmula, com $A = \frac{rs}{2}$. Daí, vem que: $A = \frac{\frac{6}{\pi} \cdot 2}{2} = \frac{6}{\pi}\ m^2$

Fazendo a mesma conta com o ângulo, vem que $A = \frac{\left(\frac{6}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\frac{36}{\pi^2} \cdot \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\frac{12}{\pi}}{2} = \frac{6}{\pi}\ m^2$

Explicaremos aos alunos que além de existirem ângulos centrais, também existem *ângulos inscritos*. Neste caso, são ângulos cujo vértice está na circunferência e enxerga um arco formado por duas cordas, igual na figura:

Figura 54: Exemplo de ângulo inscrito



Fonte: Clube da Matemática da OBMEP

Neste caso, calculamos o valor do ângulo x em função do ângulo $B\hat{O}C$:

A medida de um ângulo inscrito x na circunferência é igual à metade da respectiva medida do ângulo central; ou seja, $x = \frac{1}{2}\,B\hat{O}C$

(25 minutos)

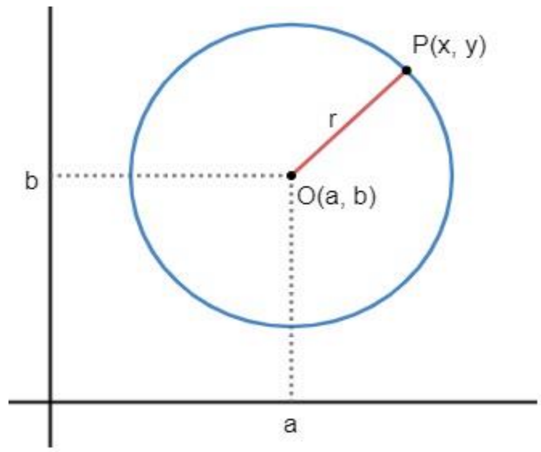
Equação reduzida da circunferência

Seja o plano cartesiano. Fixemos um ponto $O(a, b)$ em qualquer parte do plano.

Sabemos que a circunferência é o conjunto de pontos que equidistam de O.

Seja $P(x, y)$ um ponto da circunferência. Então, temos:

Figura 55: Circunferência no plano cartesiano



Fonte: Brasil Escola

Peguntaremos aos alunos como seria possível relacionar o raio r com ambos os pontos, O e P. Daremos uma dica, construíndo um triângulo retângulo com ambos os pontos.

Depois, partiremos para a explicação, demonstrando que há um triângulo retângulo implícito de hipotenusa r, e que poderíamos usar o Teorema de Pitágoras para descrever r.

$$\Rightarrow \sqrt{(x-a)^2} + \sqrt{(y-b)^2} = r$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x-a)^2} + \sqrt{(y-b)^2}\right)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

E caso O esteja localizado na origem $O(0{,}0)$, a equação fica $x^2 + y^2 = r^2$.

Um exercício para fixação será entregue:

iii. Determine as coordenadas do centro e a medida do raio da circunferência que possui equação: $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 36$.

Resolução:

Comparando essa equação com a equação reduzida da circunferência, vem que $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 36 \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, $a = 2, b = 6$ e $r = 6$.

(15 minutos)

Lista de exercícios

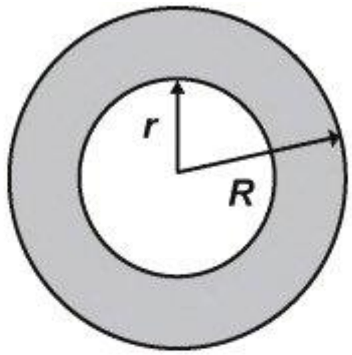
Prosseguiremos a aula, dando uma lista de exercícios para que os alunos possam trabalhar. Forneceremos auxílio conforme necessidade:

1) Um parque de diversões está construindo uma roda gigante com 22 metros de diâmetro. Uma estrutura de aço na forma de circunferência está sendo construída para fixar os assentos. Se cada assento está a 2 m de distância do próximo e considerando π = 3, o número máximo de pessoas que poderão brincar de uma só vez neste brinquedo é:

2) Um círculo e um retângulo possuem mesma área. Sabendo que o retângulo possui base igual a 1000 cm e altura igual a 314 cm, qual é o raio do círculo?

3) (Enem 2016) No projeto de arborização de uma praça está prevista a construção de um canteiro circular. Esse canteiro será constituído de uma área central e de uma faixa circular ao seu redor, conforme ilustra a figura.

Figura 56: Canteiro circular construído na praça



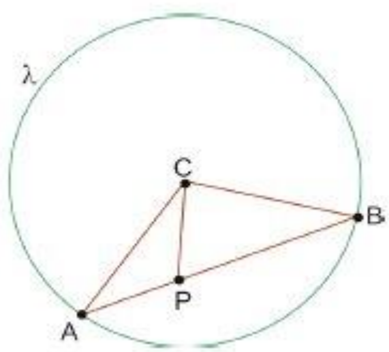
Fonte: INEP

Deseja-se que a área central seja igual à área da faixa circular sombreada.

A relação entre os raios do canteiro (R) e da área central (r) deverá ser:

4) A figura representa um círculo λ de centro C. Os pontos A e B pertencem à circunferência de λ e o ponto P pertence a . Sabe-se que PC = PA = k e que PB = 5, em unidades de comprimento.

Figura 57: Círculo λ com pontos A, B, C, P



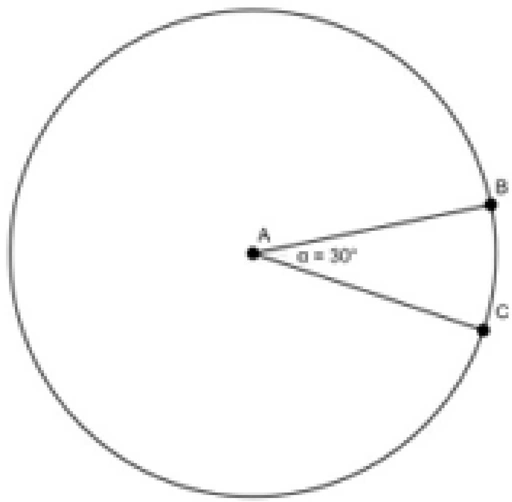
Fonte: FGV-SP

A área de λ, em unidades de área, é igual a:

5) O Planeta Terra possui um raio aproximado de 6 378 km. Suponha que um navio esteja em trajetória retilínea se deslocando no Oceano Pacífico entre os pontos B e C.

Tomando a Terra como uma circunferência perfeita, considere que o deslocamento angular do navio foi de 30º. Nestas condições e considerando π = 3, a distância em quilômetros percorrida pelo navio foi de:

Figura 58: Deslocamento do navio entre os pontos



Fonte: Toda Matéria

(60 minutos)

12.2 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LUIZ, Robson. **"Circunferência".** Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/circunferencia.htm. Acesso em 14 de nov. 2023.

GUZMAN, Jefferson Huera. **Arco da Circunferência – Fórmulas e Exercícios.** Neuro Chispas. Disponível em: https://br.neurochispas.com/pre-calculo/arco-da-circunferencia-formulas-e-exercicios/. Acesso em 13 nov. 2023.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. **Exercícios sobre o círculo e a circunferência.** Brasil Escola. https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-circulo-circunferencia.htm. Acesso em 13 nov. 2023.

DE OLIVEIRA, Raul Rodrigues. **Área do setor circular.** Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/area-setor-circular.htm. Acesso em: 13 nov. 2023.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. **Exercícios sobre os elementos do círculo e da circunferência.** Brasil Escola. https://exercicios.mundoeducacao.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-os-elementos-circulo-circunferencia.htm. Acesso em 13 nov. 2023.

12.3 RELATÓRIO DO ENCONTRO IX

Em 18 de novembro de 2023, às 8 horas da manhã, ocorreu o nono encontro do PROMAT (Programa de Matemática) na Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE. O encontro teve como foco o ensino de matemática básica para o ENEM e vestibular, destinado a alunos do ensino médio ou àqueles que planejam realizar essas provas. Luiza Stunder, Márcio Miranda, Raianny Vitoria Zerneh e Theo da Luz ministraram a aula, que contou com a participação de 8 alunos.

A aula se iniciou com a correção dos exercícios 1, 2, 9, 10 e 12 do simulado aplicado na aula anterior. A correção contou com a participação dos alunos, tanto com dúvidas, quanto com explicações sobre como conseguiram resolver. Logo após o término da correção, foi iniciado o conteúdo referente a aula: circunferências, círculos, arcos e ângulos.

Num primeiro momento, foi trabalhado circunferências e círculos, apresentado por meio de slides e anotações no quadro, suas características, bem como suas propriedades. Ao final da explicação, foi proposto um exercício de resolução de problema que os alunos responderam com base no conteúdo ministrado. Durante a resolução do exercício, os acadêmicos auxiliaram os alunos, e então foi feita sua correção.

Na segunda parte da aula, foi apresentado o conteúdo de arcos e ângulos, tal como suas transformações, de graus para radianos, de radianos, e como se aplicam em determinadas situações, desde em problemas, até o dia a dia. Durante a explicação foram respondidas eventuais dúvidas que tenham surgido. Após a explicação foi proposta uma situação-problema e em seguida foi feita sua correção.

No tempo restante da aula, foi entregue uma lista de exercícios para que os alunos começassem a responder em sala, e se caso necessário, terminassem em casa. Embora quase todos tenham terminado em sala, os acadêmicos prestaram suporte nas eventuais dúvidas.

13. ENCONTRO X

13.1 PLANO DE AULA – ENCOTRO X

Ao invés das aulas convencionais, faremos uma gincana.

A gincana será realizada com todos os alunos que participaram das aulas do Promat ofertadas no segundo semestre de 2023, as quais foram ministradas pelos acadêmicos matriculados na disciplina de Metodologia e prática de ensino de Matemática – estágio supervisionado I.

A gincana será composta por oito estações distintas, cada uma sob a responsabilidade de um estagiário. Os alunos, que serão divididos em oito grupos, passarão pelas estações para realizar as atividades sugeridas. As atividades propostas estão descritas na sequência.

Estação 1 – Tangram (Sala 49)

Disponibilizaremos para cada integrante do grupo um Tangram, então será solicitado que montem quadrados utilizando as peças do quebra cabeça. Para isso serão instruídos da seguinte forma:

1º Montar um quadrado com apenas 1 peça do Tangram;

2º Montar um quadrado com 2 peças do Tangram;

3º Montar um quadrado com 3 peças do Tangram;

4º Montar um quadrado com 4 peças do Tangram;

5º Montar um quadrado com 5 peças do Tangram;

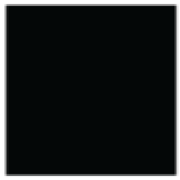
6º Montar um quadrado com as 7 peças do Tangram;

A pontuação será dada pela finalização das etapas. Quando todos os integrantes da equipe finalizarem a montagem do quadrado, a equipe ganha 1 ponto, por tipo de quebra cabeça montado. Isso significa que em algumas etapas existe a possibilidade de a equipe obter mais de 1 ponto.

Por exemplo na montagem do quadrado com duas peças, é possível montá-lo com dois triângulos pequenos ou 2 triângulos grandes. Caso a equipe utilize as duas formas, ganham 2 pontos.

Soluções e Pontuação

1º Quadrado com 1 peça: 1 ponto



2º Quadrado com 2 peças: até 2 pontos

3º Quadrado com 3 peças: 1 ponto.

4º Quadrado com 4 peças: até 3 pontos.

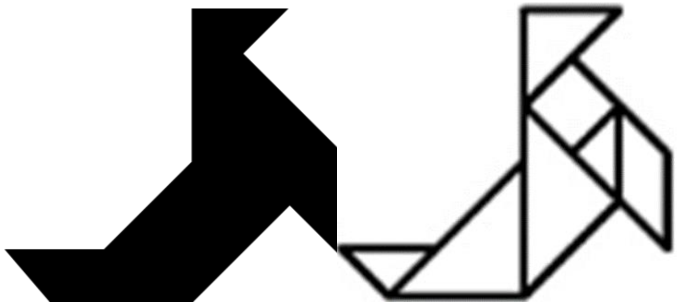
5º Quadrado com 5 peças: 1 ponto.

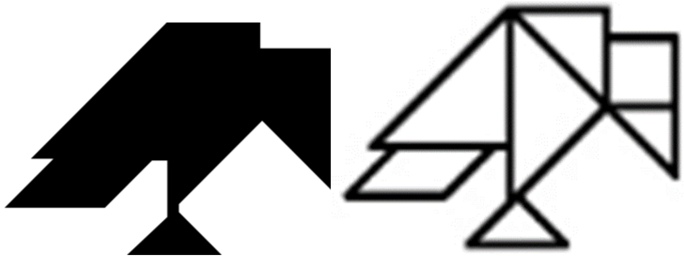
6º Quadrado com 7 peças: 1 ponto.

Total de Pontos: 9

A pontuação ainda pode ser revisada para ficar de acordo com o restante das equipes, talvez aumentar ou diminuir se necessário.

Em caso de sobra de tempo as equipes devem construir formas de animais com o Tangram, podendo obter pontos extras.





Estação 2 – Blackjack de polinômios (LIM)

Por meio do baralho adaptado para polinômios (já confeccionado), será jogado o jogo Blackjack (ou vinte e um) com os alunos. O baralho utilizado é composto pela junção de 4 baralhos menores que contêm as seguintes 36 cartas:

$$Ax,\ 2x,\ 3x,\ 4x,\ 5x,\ 6x,\ 7x,\ 8x,\ 9x,\ 10x,\ 10x,\ 10x$$

$$Ax^2,\ 2x^2,\ 3x^2,\ 4x^2,\ 5x^2,\ 6x^2,\ 7x^2,\ 8x^2,\ 9x^2,\ 10x^2,\ 10x^2,\ 10x^2$$

$$Ax^3,\ 2x^3,\ 3x^3,\ 4x^3,\ 5x^3,\ 6x^3,\ 7x^3,\ 8x^3,\ 9x^3,\ 10x^3,\ 10x^3,\ 10x^3$$

O número A que multiplica alguns monômios vale 1 ou 11 (o que for mais vantajoso para quem possui a carta). Nesse jogo, os participantes não competem entre si: todos jogam contra o *dealer*

O professor fixo na sala será o *dealer* do jogo. No início do jogo, serão entregues duas cartas para todos (inclusive ao *dealer*), as quais podem ser vistas por todos os jogadores. Ao receberem suas cartas, os participantes devem somar os monômios obtidos (só podemos somar monômios de mesma parte literal!). Na sua vez de jogar, o aluno escolhe se deseja comprar mais uma carta ou não. Ao comprar uma nova carta, soma-se o monômio presente nela com o restante das suas cartas. O intuito do jogo é fazer com que um dos 3 coeficientes do polinômio chegue o mais próximo possível de 21, mas sem extrapolar esse valor. Caso algum coeficiente seja maior do que 21, o jogador “estoura” e perde o jogo. Para ganhar o jogo, o participante deve:

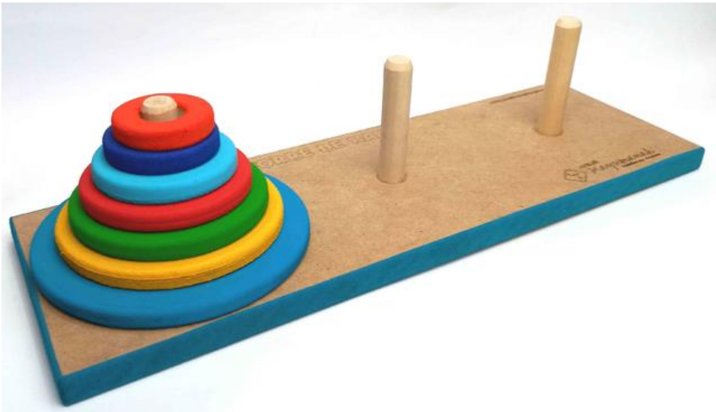
- Não estourar
- Ter um coeficiente em seu polinômio que seja maior do que todos os coeficientes do polinômio do *dealer*

Se o *dealer* estourar, todos os participantes que ainda não estouraram ganham automaticamente.

A contabilização de pontos será feita da seguinte maneira: serão feitos 15 jogos com os alunos (considerando um grupo de 5 pessoas, serão feitas 3 rodadas. Se houver grupos com um número diferente de pessoas, jogamos de tal modo que aconteçam 15 jogos no total). Será anotada a quantidade de vitórias de cada grupo e, ao final, o grupo que tiver mais vitórias ganhará 9 pontos, o grupo em 2° lugar no número de vitórias ganha 8 pontos e assim por diante até que o último grupo ganhe 2 pontos.

Estação 3 – Torre de Hanói (Caracol)

Disponibilizaremos a cada grupo de alunos uma torre de Hanói, o objetivo será passar todas as peças do pino da extrema direita ao pino da extrema esquerda sem sobrepor uma determinada peça com uma peça maior.



A primeira rodada será com apenas três discos e conforme os alunos concluírem a transposição de todas as peças, será adicionado mais um disco, e assim sucessivamente, até realizarem o desafio com 6 discos. Cada grupo terá o tempo máximo de 15 minutos para realizar o máximo de transposições que conseguirem. O grupo ganhará um ponto por cada peça que conseguir passar para o pino da extrema direita de maneira correta e a todos que conseguirem concluir todas as transposições em menos de 15 minutos, serão concedidos pontos extras seguindo a regra de 7 pontos para o grupo com menor tempo, 6 para o segundo menor tempo, 5 para o terceiro menor tempo e assim sucessivamente.

Estação 4 – Jogo de Dardos das Frações (Cantina)

Essa atividade é composta por 12 cartas contendo perguntas e problemas sobre frações. Cada grupo terá que escolher até 8 cartas para serem respondidas, sem saber quais perguntas estão nas cartas. Para cada acerto terão direito a lançar dois dardos em direção ao alvo, que tem pontuação variando entre 1 e 9 dependendo de onde o dardo for acertado, caso o dardo não seja acertado no alvo o grupo não pontuará e caso seja acertado no centro do alvo receberá 13 pontos, para pontuação de cada rodada será contado apenas o dardo que atingiu a maior pontuação entre os dois lançamentos.

Que expressão fracionária representa a parte colorida da seguinte figura?

a)8/4 b)1/2

c)4/2 d)4/4

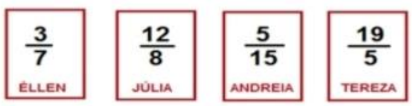
No aniversário de Júlia, ela ganhou de presente um bolo e dividiu em 12 partes iguais, conforme a imagem:

Sabendo-se que Júlia comeu 3 pedaços, deu 1 para o seu sobrinho e 2 para sua irmã, a fração do bolo que restou foi:

a)12/6 b)3/12

c)1/2 d)1/5

v8-Éllen, Júlia, Andreia e Tereza brincam juntas com um jogo de cartas. Segundo as regras, vence o jogo quem obtiver a carta com o maior número. Veja, a seguir, as cartas retiradas pelas amigas.



É correto afirmar que a vencedora do jogo foi:

A) Éllen C) Andreia

B) Júlia D) Tereza

Qual afirmação é verdadeira:

a) $\frac{5}{10} = \frac{15}{20}$

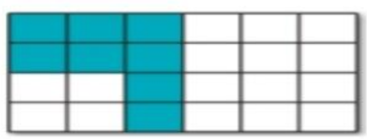
b) $\frac{7}{3} = \frac{84}{30}$

c) $\frac{11}{5} = \frac{22}{10}$

d) $\frac{10}{5} = 5$

e) $\frac{6}{5} = \frac{48}{35}$

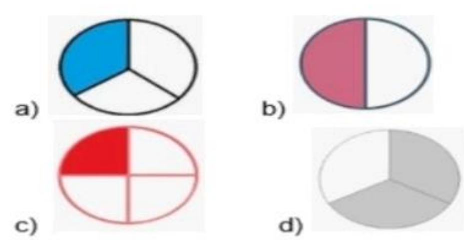
Que fração representa a seguinte figura?



a) $\frac{8}{20}$ b) $\frac{24}{8}$

c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{3}$

Fernanda, sozinha, comeu 2/3 de uma melancia. A imagem abaixo que representa a fração que sobrou da melancia é:



Em uma disputa entre carros de corrida um competidor estava a 2/7 de terminar a prova quando sofreu um acidente e precisou abandoná-la. Sabendo que a competição foi realizada com 56 voltas no autódromo, em que volta o competidor foi retirado da pista?

a) 16ª volta
b) 40ª volta
c) 32ª volta
d) 50ª volta

Uma sala de aula possui 24 alunos, sendo que 8 são meninas e 16 são meninos. A fração que representa a quantidade de meninas em relação ao todo é:

A) 1/3

B) 1/4

C) 2/3

D) 1/2

E) 4/3

Uma herança será repartida entre 3 herdeiros. Mariana é uma das herdeiras, e ficará com 1/4 dessa herança. Matheus ficará com 2/5. O restante é de Jovair. Então a fração que representa a parte da herança de Jovair é:

A) 3/20

B) 7/20

C) 13/20

D) 7/10

E) 13/10

Julgue as afirmativas as seguir:
I – Toda fração imprópria é um número maior que 1.
II – Toda fração própria é um número menor que 1.
III – As frações 2/3 e 8/12 são equivalentes.
Marque a alternativa correta:
A) Somente a I é falsa
B) Somente a II é falsa
C) Somente a III é falsa
D) I e II são falsas.
D) Todas são verdadeiras

Pedro ganhou 70 reais de aniversário, gastou 2/5 desse valor na loja de brinquedos e 10 reais na sorveteria. Quanto ainda lhe resta?

a) 32

b) 38

c) 42

d) 48

e) 60

Determinado condomínio trocou seu reservatório de água, com capacidade para 15000 litros, por outro dois terços maior. Qual é a capacidade do novo reservatório?

a) 10000 l.

b) 15000 l.

c) 20000 l.

d) 25000 l.

e) 30000 l.

No final será somada a pontuação total de cada grupo com os lançamentos.

A pontuação para a gincana será definida de acordo com a pontuação de cada grupo no lançamento de dardos:

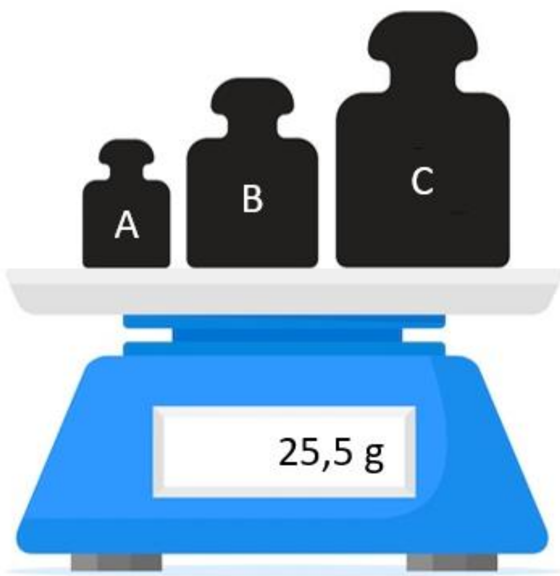
O grupo com a maior soma de pontos de lançamentos de dardos receberá 10 pontos para a gincana, o segundo grupo maior pontuador receberá 9 pontos, o terceiro receberá

8 pontos, o quarto 7 pontos, o quinto e sexto colocados 6 pontos e os dois grupos com as menores pontuações receberam 5 pontos.

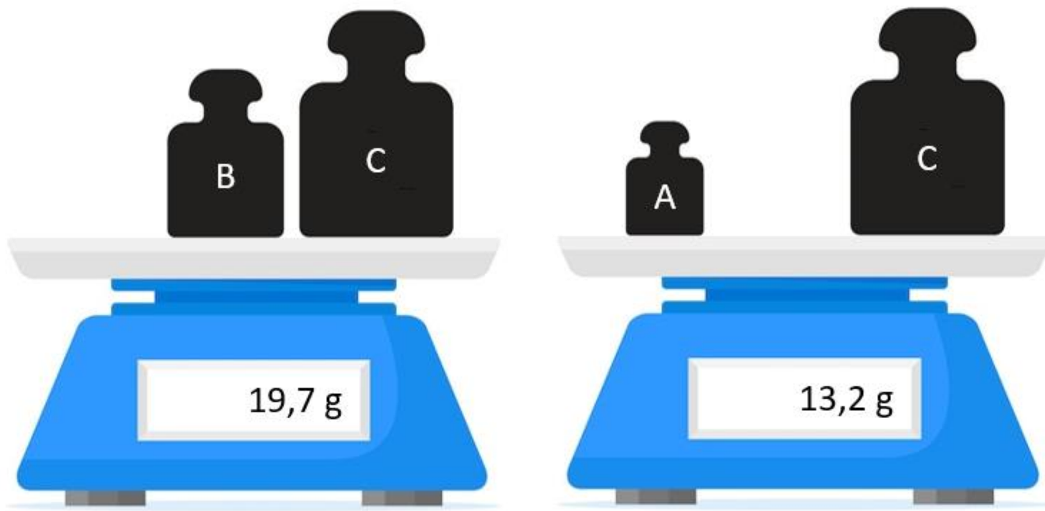
Estação 5 – Atividade das Massas + sistemas (Lab. de Física)

Essa atividade tem como objetivo determinar a massa de objetos por meio de sistemas de equações. Será utilizado o Laboratório de Física, serão necessários para a gincana uma balança digital, e objetos com massas variadas.

Por exemplo: Queremos descobrir a massa do peso C.



Para isso podemos remover e adicionar outros objetos, desde que o peso que procuramos a massa não fique sozinho na balança. Então podemos mexer nos pesos A e B, enquanto C fica fixo.



Nesse momento os participantes deverão montar um sistema de equações para descobrir o valor de C.

$$\begin{cases} A + B + C = 25{,}5 \\ B + C = 19{,}7 \\ A + C = 13{,}2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos que $C = 7{,}4\ g$.

A pontuação será definida pela quantidade de sistemas resolvidos, então para isso serão disponibilizados kits com objetos com massas diferentes.

Estação 6: Desafio da Cesta + Equação do Segundo Grau (LEM)

Objetivo do Jogo:

Os alunos terão a oportunidade de praticar arremessos na cesta enquanto resolvem equações do segundo grau para ganhar pontos.

Materiais Necessários:

- Cesta de basquete (lixeira)
- Bolas de basquete (bolas de plástico)
- Lista de equações do segundo grau
- Quadro ou papel para anotar os pontos

Configuração do Jogo:

- Cada participante da equipe arremessará com o intuito de acertar a cesta.
- Caso o participante erre o arremesso, volta para o final da fila.
- Se o participante acertar, o jogador deverá resolver uma equação do segundo grau. Assim que o participante encontrar o resultado, a equipe acumula 1 ponto.
- O próximo jogador só poderá fazer o arremesso assim que o integrante que acertou resolver corretamente a equação do segundo grau.
- Todos os integrantes podem auxiliar no processo de resolução, porém devem permanecer nos lugares, ou seja, na fila para arremesso.
- A atividade ocorrerá pelo prazo de 15 minutos.
- Ao final, a pontuação será contabilizada com pontos ilimitados.

Equações do segundo grau

1) $X^2 - 4X + 4 = 0\ (Raíz\ dupla: X = 2)$
2) $X^2 - 8X + 16 = 0\ (Raíz\ dupla: X = 4)$
3) $2X^2 - 6X + 4 = 0\ (Raízes: X = 1\ ou\ X = 2)$
4) $X^2 - 4X - 5 = 0\ (Raízes: X = -1\ ou\ X = 5)$
5) $3X^2 - 9X + 6 = 0\ (Raízes: X = 1\ ou\ X = 2)$
6) $X^2 - 5X + 6 = 0\ (Raízes: X = 2\ ou\ X = 3)$
7) $4X^2 - 16X + 16 = 0\ (Raíz\ dupla: X = 2)$
8) $X^2 - 2X - 3 = 0\ (Raíz\ dupla: X = 3\ ou\ X = -1)$
9) $3x^2 - 15x + 18 = 0\ (Raízes: X = 2\ ou\ X = 3)$
10) $2x^2 - 8x + 8 = 0\ (Raíz\ dupla: X = 2)$
11) $x^2 - 3x + 2 = 0\ (Raízes: x = 1\ ou\ x = 2)$
12) $3x^2 - 6x + 3 = 0\ (Raíz\ dupla: x = 1)$
13) $4x^2 - 8x + 4 = 0\ (Raíz\ dupla: x = 1)$

14) $x^2 - 6x + 8 = 0$ $(Raízes: x = 2\ ou\ x = 4)$

15) $-x^2 + 5x - 6 = 0$ $(Raízes: X = 2\ ou\ X = 3)$

16) $-4X^2 + 12X - 8 = 0$ $(Raízes: X = 1\ ou\ X = 2)$

17) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ $(Raízes: x = \frac{1}{2}\ ou\ x = 3)$

18) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ $(Raízes: x = 1\ ou\ x = \frac{2}{3})$

19) $5x^2 + 2x - 1 = 0$ $(Raízes: x = \frac{-1+\sqrt{6}}{5}\ ou\ x = -\frac{1+\sqrt{6}}{5})$

20) $-4X^2 - 12X + 8 = 0$ $(Raízes:\ -\frac{3+\sqrt{17}}{2}\ ou\ x = \frac{\sqrt{17}-3}{2})$

21) $X^2 + 2X + 5 = 0$ $(Raízes: x = 1 - \sqrt{6}\ ou\ x = 1 + \sqrt{6})$

Estação 7 – Varal de frações (Hall de entrada)

A atividade do Varal de Frações é uma proposta que visa desenvolver a habilidade dos alunos em ordenar números, especialmente em suas formas fracionárias. Na dinâmica, os participantes terão a tarefa de organizar 13 cartas numeradas inicialmente empilhadas sobre uma mesa. O desafio consiste em colocar as cartas em ordem correta, considerando as representações fracionárias ou decimais presentes em cada uma delas.

O sistema de pontuação busca incentivar a precisão na ordenação. O time ganhará um ponto por cara em seu lugar correto. Estar, no "lugar correto" significa que as cartas diretamente à esquerda e diretamente à direita são, de fato, as corretas dentre todas as cartas. Para as cartas de ponta, basta apenas a carta subsequente (ou anterior) estar correta.

Essa abordagem recompensa não apenas a capacidade de ordenação, mas também a consistência na análise e posicionamento dos números representados nas cartas, isso pois, a cada carta colocada corretamente, o aluno tem meio caminho andado para outras duas cartas.

Para ilustrar como a pontuação funciona, considere o exemplo em que um participante ordena as cartas numeradas como $\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$ como $\left\{\frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{2}\right\}$. Como as cartas $\left\{\frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right\}$ estão na ordem correta, ele recebe 1 ponto pela carta $\frac{1}{5}$, que está corretamente na ponta e com o $\frac{1}{4}$ à direita. O aluno recebe também um ponto pela carta $\frac{1}{4}$, que está corretamente entre as cartas $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{3}$. No entanto, não recebe pontos por nenhuma outra carta, finalizando então com 2 pontos.

A atividade acaba se todas as cartas forem ordenadas corretamente ou ao final dos 15 minutos previstos para a atividade.

Estação 8 – Jogo dos quatro quatros (Parquinho)

A atividade consiste em construir os números de 0 até 10, sempre com 4 quatros (4 algarismos) utilizando apenas das quatro operações básicas da matemática, soma, subtração, multiplicação e divisão.

Cada número encontrado contará como um ponto.

As expressões que resolvem (mas não são únicas) de 0-10 são:

$$0 = 4 - 4 + 4 - 4$$

$$1 = \frac{44}{44}$$

$$2 = \frac{4 * 4}{4 + 4}$$

$$3 = \frac{4 + 4 + 4}{4}$$

$$4 = \frac{4 - 4}{4} + 4$$

$$5 = \frac{(4 * 4) + 4}{4}$$

$$6 = \frac{4 + 4}{4} + 4$$

$$7 = \frac{44}{4} - 4$$

$$8 = \frac{4 * (4 + 4)}{4}$$

$$9 = \frac{4}{4} + (4 + 4)$$

$$10 = \frac{(44 - 4)}{4}$$

13.2 RELATÓRIO DO ENCONTRO X

Em 25 de novembro de 2023, às 8 horas da manhã, realizou-se o décimo encontro do PROMAT (Programa de Matemática) na Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE. O evento contou com a participação de todos os estudantes da disciplina de Estágio Supervisionado I, sendo atribuídas duas atividades a cada equipe. Nesse contexto, os alunos Márcio Miranda e Raianny foram responsáveis pela condução da atividade "Desafio da Cesta + Equações de segundo grau".

Durante a atividade, foi observado que os alunos enfrentaram desafios ao lidar com a forma resolutiva das equações de segundo grau, uma vez que a maioria não estava familiarizada com método de soma e produto. Apesar dessas dificuldades iniciais, o dinamismo e a competitividade do jogo capturaram a atenção dos participantes, gerando uma experiência colaborativa e estimulante. Algumas equipes demonstraram maior disposição, tanto por parte dos alunos envolvidos quanto dos estagiários que acompanharam o grupo.

A dinâmica proporcionou uma oportunidade para solidificar os métodos de resolução de equações de segundo grau por meio de uma abordagem competitiva. Ao longo da atividade, foram necessários ajustes para garantir que todos os grupos tivessem uma participação efetiva e justa. Optamos por estender o benefício concedido a algumas equipes para que as restantes não fossem prejudicadas.

A pontuação foi atribuída com base no número de resoluções corretas das equações de segundo grau, variando de 2 a 10 equações corretas, representando o pior e melhor desempenho, respectivamente. Essa métrica proporcionou uma medida objetiva do entendimento dos participantes e contribuiu para o caráter competitivo da atividade, destacando pontos de melhoria e êxito no processo de aprendizado.

Enquanto isso, os estagiários Luiza e Theo ficaram responsáveis pela atividade “Torre da Hanoi” sendo que, o Theo ficou responsável por conduzir uma equipe de alunos de uma atividade a outra, enquanto Luiza ficou responsável por assistir e pontuar as equipes da resolução da Torre de Hanoi.

Durante a atividade, percebeu-se que a maioria dos alunos já estavam familiarizados com o jogo e tinham certa facilidade na conclusão do desafio, sendo os com 3 e 4 peças os realizados em menos tempo e os com 5 e 6 em mais tempo e com mais dificuldades. Com exceção de uma equipe, todas as esquipes foram capazes de completar o desafio com 3, 4, 5 e 6 peças dentro do tempo determinado.

Após todas as equipes haverem concluído todas as atividades, todos os estagiários responsáveis pela supervisão e pontuação das equipes se reuniram em uma sala para contabilizar os pontos enquanto o resto dos estagiários, junto com os alunos foram para a sala de LEM, confraternizar e comer o lanche preparado para a gincana. Assim que os pontos foram contabilizados, foi anunciado e parabenizado as 3 equipes com maiores pontuações e foi agradecido a todos os alunos pela participação no projeto.

O projeto serviu de grande aprendizado a todos os estagiários e proporcionou a muitos, uma primeira experiência de como é estar em sala de aula na posição de professor e como preparar e ministrar aulas.

14. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Estágio Supervisionado I no Promat, ao transcorrer de seus múltiplos encontros, revelou-se uma experiência de aprendizado e amadurecimento, tanto para os estagiários quanto para os alunos participantes. A abordagem pedagógica, combinando teoria e prática por meio de jogos e dinâmicas, proporcionou um ambiente propício para a compreensão e assimilação dos conteúdos matemáticos.

Inicialmente, notou-se que a abordagem tradicional em algumas aulas resultou em certa apatia por parte dos alunos. Esse cenário provocou uma reflexão sobre a importância de métodos mais dinâmicos para manter o interesse e o engajamento ao longo das aulas. Além disso, a constatação de que algumas atividades tomaram mais tempo do que o previsto ressaltou a necessidade de um planejamento, visando garantir que todas as atividades sejam concluídas dentro do tempo estipulado.

O uso de mapas mentais, embora tenha apresentado alguns desafios, revelou-se uma ferramenta valiosa para apresentação e revisão de conceitos, permitindo uma revisão dos temas já conhecido pelo alunos. A reflexão sobre a eficácia desses recursos, como discutido no encontro IV, evidencia o compromisso constante em aprimorar as práticas pedagógicas.

A utilização de jogos, como o "Racionalizei", o "Escadas e Serpentes", o "Dorminhoco das Funções do Segundo Grau" e a "Trilha de Pitágoras", não apenas estimulou o interesse dos alunos, mas também evidenciou a eficácia desse método em promover o engajamento e a compreensão dos conceitos matemáticos. A competição saudável, aliada à inovação, mostrou-se uma abordagem efetiva para superar desafios e despertar o interesse dos estudantes.

A culminação do estágio na Gincana Final reforçou não apenas os conhecimentos adquiridos, mas também a importância da interação e celebração no ambiente educacional. A confraternização após as atividades demonstrou a construção de laços entre estagiários e alunos, consolidando o aprendizado não apenas como um processo educacional, mas também como uma experiência social e colaborativa.

Em síntese, o Promat não apenas cumpriu seu propósito de proporcionar uma vivência prática ao ensino da matemática, mas também instigou uma reflexão constante sobre as práticas pedagógicas. As lições aprendidas ao longo desses encontros serão levadas adiante, contribuindo para a formação continuada dos estagiários e inspirando abordagens inovadoras no futuro. Este estágio não apenas preparou para desafios futuros na docência, mas também reforçou a ideia de que a matemática pode ser aprendida de maneira envolvente e prazerosa, desde que apresentada com criatividade e dedicação.